Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 13

---

1. a) T beschränkt, d.h $\|Tx\|_{H_2}/\|x\|_{H_1} \leq M < \infty$, $\forall x \neq 0$. $\Rightarrow$ $\|Tx_1 - Tx_2\|_{H_2} = \|T(x_1 - x_2)\|_{H_2} \leq M\|x_1 - x_2\|_{H_1}$ $\Rightarrow$ Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig, d.h. $\exists \delta > 0 : \|Tx - T\vec{0}\|_{H_2} \leq 1$, $\forall x : \|x\|_{H_1} \leq \delta$ $\Rightarrow$ $\|Tx\|_{H_2} \leq 1/\delta$, $\forall x : \|x\|_{H_1} \leq 1$.
   b) Der Abstand in der L^2-Norm zu einer Funktion $f \in L^2(\Omega)$ wird minimiert durch diejenige konstante Funktion, für die
   $$g(c) := \int_\Omega (f(x) - c)^2 \, dx = \int_\Omega f^2(x) \, dx - 2c \int_\Omega f(x) \, dx + |\Omega| c^2$$
   minimal ist. Es folgt $P_{konst.} f = 1/|\Omega| \int_\Omega f(x) \, dx$.

2. ($\eta \in C_c^1(0, \infty) \cap H^1(0, \infty)$) Sei $\hat{\eta}$ die Einschränkung von η auf $(0,1)$. Mit $\phi \in C_c^1(0,1)$ ist auch $\hat{\eta}\phi \in C_c^1(0,1)$. Es folgt
   $$-\int_0^1 u'(x)(\hat{\eta}(x)\phi(x)) \, dx = \int_0^1 u(x)\hat{\eta}'(x)\phi(x) \, dx + \int_0^1 u(x)\hat{\eta}(x)\phi'(x) \, dx$$
   für alle $\phi \in C_c^1(0,1)$ und damit $(u\hat{\eta})' = u'\hat{\eta} + u\hat{\eta}'$ und $u\hat{\eta} \in H^1(0,1)$.
   Sei nun $\phi \in C_c^1(0, \infty)$ und $\tilde{\phi} \in C_c^1(0,1)$ mit $\hat{\phi}(x) = \phi(x)$ für $x \leq 1 - \epsilon$ und $\hat{\phi}(x) = 0$ für $x \geq 1 - \epsilon/2$ (dazwischen z.B. durch ein Polynom vom Grad ≥ 3 interpoliert). Dann ist $\int_0^\infty \tilde{u}(x)\eta(x)\phi'(x) \, dx = \int_0^1 u(x)\hat{\eta}(x)\hat{\phi}(x) \, dx = -\int_0^1 (u'(x)\hat{\eta}(x) + u(x)\hat{\eta}'(x))\hat{\phi}(x) \, dx = -\int_0^\infty (\tilde{u}'(x)\eta(x) + u(x)\eta'(x) \, dx$.

3. (u^+ und $\nabla u^+ \in L^2(\Omega)$ ist klar). Da $f_n \in^1 (\mathbb{R})$, $f_n(0) = 0$ und $f_n'(r) = r(r^2 + n^{-2})^{-1/2} \leq 1$ gilt, ist mit $u \in H^1(\Omega)$ auch $f_n \in H^1(\Omega)$ (Kettenregel). Es folgt
   $$-\int_\Omega f_n(u(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \, dx = \int_\Omega \chi_{u>0} u(x)(u^2(x) + n^{-2})^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\phi(x) \, dx$$
   und mit dem Satz von Lebegues nach Grenzübergang auf beiden Seiten
   $$-\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \, dx = \int_\Omega \chi_{u>0} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\phi(x) \, dx \quad \text{für alle } \phi \in C_c^1(\Omega).$$

4. Es gilt für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)_+$:
   $$0 \geq -\int_\Omega u(x)\Delta\phi(x) \, dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\phi(x) \, dx = \int_\Omega \nabla(u - c)(x)\nabla\phi(x) \, dx.$$
   Da $C_c^1(\Omega)_+$ dicht in $H_0^1(\Omega)_+$ liegt, gilt obige Gleichung auch für $(u - c)^+ \in H_0^1(\Omega)_+$, d.h.
   $$0 \geq \int_\Omega \nabla(u - c)(x)\nabla(u - c)^+(x) \, dx = \int_\Omega \nabla(u - c)^+(x)\nabla(u - c)^+(x) \, dx,$$
   was bedeutet $\nabla(u - c)^+ = 0$ f.ü., woraus folgt $(u - c)^+ = 0$ f.ü., also $u \leq c$ fast überall.