Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 12

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 14

Abgabetermin: Montag, 7.2.2011 in der Vorlesung

Für Aufgabe 1 benutze das folgende **Lemma**.

Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ und $u \in H^1(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $u_n \in C_c^1(\Omega)$, so dass $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ in $L^2(\omega)$, $j = 1, \ldots, d$, für alle $\omega \subset \Omega$ offen mit kompaktem Abschluss $\overline{\omega} \subset \Omega$ (Abschluss bezüglich $\mathbb{R}^d$).

1. (a) (Kettenregel) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f'(r) \leq M < \infty$ (und $f(0) = 0$, falls $|\Omega| = \infty$). Sei $u \in H^1(\Omega)$. [4]

   Zeige: $f \circ u \in H^1(\Omega)$ und $\dfrac{\partial (f \circ u)}{\partial x_j}(x) = f'(u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, \ldots, d.$

   (b) (Produktregel) Seien $u, v \in H^1(\Omega)$ und $v, \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \quad j = 1, \ldots, d.$

   Zeige: $uv \in H^1(\Omega)$ und $\dfrac{\partial (uv)}{\partial x_j} = u\dfrac{\partial v}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u}{\partial x_j}v, \quad j = 1, \ldots, d.$

2. (a) Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \mapsto \mathbb{K}$ eine stetige und koerzive Sesquilinearform. Sei C eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von H und bezeichne mit P die orthogonale Projektion auf C. [4]

   Zeige, dass $Rea(u|u - Pu) \geq 0$ für alle $u \in H$ äquivalent ist zu $Rea(Pu|u - Pu) \geq 0$ für alle $u \in H$.

   (b) Sei $a(\cdot|\cdot)$ jetzt zudem symmetrisch (d.h $a(u|v) = \overline{a(v|u)}$).

   Zeige, dass $a(Pu|Pu) \leq a(u|u)$ für alle $u \in H$ aquivalent ist zu $Rea(u|u - Pu) \geq 0$ für alle $u \in H$.

   Welche Äquivalenz lässt sich also in diesem Fall zu Proposition 7.60 aus der Vorlesung hinzufügen?

   (c) Sei Ω ein offenes Gebiet im R^d, für das die Poincaré-Ungleichung gilt, und bezeichne mit P_+ die orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega)_+$. Sei $a : H_0^1 \times H_0^1 \mapsto \mathbb{R}$ mit $a(u|v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx$. Der zu $a(\cdot|\cdot)$ gehörige Operator A ist der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen.
   Zeige, dass für jedes $f \in L^2(\Omega)_+$ die Lösung von $\lambda u - Au = f$, $\lambda > 0$, ebenfalls Element von $L^2(\Omega)_+$ ist.

3. (a) Sei H ein Hilbertraum und $b : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige und symmetrische Bilinearform. [4]

   Zeige, dass für jede Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ gilt $\dfrac{d}{dt}b(u(t)|u(t)) = 2b(\dfrac{du}{dt}(t)|u(t)), \quad t \geq 0.$

   (b) Sei $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige und symmetrische Bilinearform mit $a(u|u) \geq 0$ für alle $u \in V$ und A der zugehörige Operator, wobei der Hilbertraum V dicht und mit stetiger Einbettung in H liege.

   Zeige, dass das Anfangswertproblem auf $C^2(\mathbb{R}_+, H)$

   $$w_{tt}(t) - Aw(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0, \quad w(0) = u_0 \in V,\ w_t(0) = u_1 \in V,$$

   höchstens eine Lösung besitzt, und wende dieses Resultat auf die Wellengleichung an.