Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 14

1. (a) Es gilt $|f(r)| \leq f(0) + Mr$. Es folgt

$$\int_\Omega (f \circ u)^2(x)\, dx \leq \int_\Omega |f(0) + Mu(x)|^2 dx \leq 2 \int_\Omega f^2(0)\, dx + 2M^2 \int_\Omega u^2(x)\, dx < \infty,$$

also $(f \circ u) \in L^2(\Omega)$; und

$$\int_\Omega (f'(u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx \leq M^2 \int_\Omega (\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx < \infty, \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Sei nun $u_n \in C_c^1(\Omega)$ eine Folge wie im Lemma. Dann erhält man

$$\int_\Omega (f \circ u_n)\frac{\partial \phi(x)}{dx_j} dx = -\int_\Omega f'(u_n(x))\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j}\phi(x)\, dx \quad \text{für alle } \phi \in C_c^1(\Omega),\ j = 1, \ldots, d,$$

und nach Grenzübergang auf beiden Seiten mit dem Satz von Lebegues die Behauptung.

(b) Es gilt

$$\int_\Omega (uv)^2(x)\, dx \leq \|v\|_\infty^2 \int_\Omega u^2(x)\, dx < \infty \quad \text{und}$$
$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j})^2(x)\, dx \leq 2\|v\|_\infty^2 \int_\Omega u^2(x)\, dx + 2\|v\|_\infty^2 \int_\Omega (u'(x))^2\, dx < \infty, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Sei nun $u_n \in C_c^1(\Omega)$ eine Folge wie im Lemma. Dann erhält man

$$-\int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} u_n(x)\phi\, dx = \int_\Omega v(x)\frac{\partial (u_n\phi)}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_\Omega v(x)u_n(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} dx + \int_\Omega v(x)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j}\phi(x)\, dx,$$

also $\int_\Omega (vu_n)(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}u_n(x) + v(x)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j}\right)\phi(x)\, dx$ und nach Grenzübergang auf beiden Seiten mit dem Satz von Lebegues die Behauptung.

2. (a) Sei $Rea(Pu|u - Pu) \geq 0$. Dann gilt wegen der Koerzivität von $a(\cdot|\cdot)$

$$0 \leq Rea(Pu-u|u-Pu) + Rea(u|u-Pu) = -Rea(u-Pu|u-Pu) + Rea(u|u-Pu) \leq Rea(u|u-Pu).$$

Sei nun $Rea(u|u-Pu) \geq 0$ für alle $u \in H$. Dann folgt auf Grund von $P(Pu+\lambda(u-Pu)) = Pu$ für alle $\lambda > 0$

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} Rea(Pu + \lambda(u - Pu)|Pu + \lambda(u - Pu) - Pu) = Rea(Pu + \lambda(u - Pu)|(u - Pu))$$

und nach Grenzübergang $\lambda \to 0$ die Behauptung, da $a(\cdot|\cdot)$ stetig ist.

(b) Da $a(\cdot|\cdot)$ eine stetige, symmetrische und koerzive Sesquilinearform ist, gilt für $a(\cdot|\cdot)$ natürlich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Sei $a(Pu|Pu) \leq a(u, u)$. Dann gilt

$$a(u|u - Pu) = a(u|u) - a(u|Pu) \geq a(u|u) - a(u|u)^{1/2}a(Pu|Pu)^{1/2} \geq 0.$$

Sei $a(u|u - Pu) \geq 0$, Dann gilt mit Teil (a)

$$a(Pu|Pu) = a(Pu - u|Pu) + a(u|Pu) \leq a(u|Pu) \leq a(u|u)^{1/2}a(Pu|Pu)^{1/2}.$$

Also lässt sich in diesem Fall zu Proposition 7.60 aus der Vorlesung noch die Äquivalenz $PV \subseteq V$ und $a(Pu|Pu) \leq a(u|u)$ für alle $u \in V$ hinzufügen.

(c) Da $a(\cdot|\cdot)$ stetig auf H_0^1, koerziv und symmetrisch ist und $P_+H_0^1 \subset H_0^1$, folgt die Behauptung mit Teil (b) und Proposition 7.60 aus $\int_\Omega (\nabla(P_+u)(x))^2\,dx = \int_\Omega \chi_{u>0}(\nabla u(x))^2\,dx \leq \int_\Omega (\nabla u(x))^2\,dx$.

3. (a) Es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} b\left(u(t+h)|u(t+h)\right) - b\left(u(t)|u(t)\right) &= b\left(u(t+h)-u(t), u(t+h)\right) \\ &\qquad + b\left(u(t)|u(t+h)\right) - b\left(u(t)|u(t)\right) \\ &= b\left(u(t+h)-u(t)|u(t+h)\right) + b\left(u(t)|u(t+h)-u(t)\right), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}b(u(t),u(t)) &= \lim_{h\to 0} b\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, u(t+h)\right) \\ &\qquad + b\left(u(t), \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) = 2b\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t)\right), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Definiere die Energie einer Lösung des gegebenen Anfangswertproblems durch

$$E(t) := a(w(t)|w(t)) + \|w_t(t)\|_H^2 \geq 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= 2a(w_t(t)|w(t)) + 2\langle w_{tt}(t), w_t(t)\rangle_H = 2\langle -Aw(t), w_t(t)\rangle_H + 2 + 2\langle w_{tt}(t), w_t(t)\rangle_H \\ &= 2\langle -w_{tt}(t), w_t(t)\rangle_H + 2\langle w_{tt}(t), w_t(t)\rangle_H = 0, \end{aligned}$$

d.h. die Energie ist konstant für jede Lösung. Existieren nun zwei Lösungen u und v, dann löst deren Differenz das Anfangswertproblem mit $(u-v)(0) = 0$ und $(u-v)_t(0) = 0$, d.h. $E(u-v) \equiv 0$. Daraus folgt $(u-v)_t(t) \equiv 0$, also $(u-v)(t) \equiv 0$.
Das obige Resultat liefert Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung mit Neumann- oder Dirichlet-Ranbedingungen, weil die zugehörige Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ bzw. $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$, gegeben durch $a(u|v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$, die Bedingungen an $a(\cdot|\cdot)$ erfüllt.