Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 15

---

1. (a) $L(x,u,\nabla u) = e^{\phi(x)}\left(\frac{1}{2}\nabla^2 u(x) - f(x)u(x))\right)$

   (b) $L(x,u,u_x,u_t) = e^{-t/\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}u_x^2 + u_t^2\right)$.

2. (a) Euler-Lagrange-Gleichung: $2u_{xx}(x,y,z) + 2u_{yy}(x,y,z) - 2u_{zz}(x,y,z) + f(u(x,y,z)) = 0$ oder $u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) - u_{zz}(x,y,z) + \frac{1}{2}f(u(x,y,z)) = 0.$

   (b) Sei $u_0 = u_1 \equiv 0$. Dann ist die eindeutige Lösung der Wellengleichung gegeben durch $u \equiv 0$ und $I(u) = 0$. Wähle z.B. $w(x,t) = t^2$. Dann erfüllt w Rand- und Anfangsbedingungen, aber $I(w) = \int_\Omega (u_x^2(t,x) - u_t^2(t,x))\, d(t,x) = -\infty.$

3. Euler-Lagrange-Gleichung: $0 = \sum_{i=1}^{d} p(u_{x_i}|\nabla u|^{p-2})_{x_i} = p\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$

   Variationelle Symmetrie: Mit $\omega^\epsilon = \{y = xe^\epsilon : x \in \omega\}$ folgt

$$\int_\omega |\nabla(e^{\epsilon\frac{n-p}{p}}u(e^\epsilon x))|^p\, dx = \int_\omega e^{\epsilon(n-p)}|\nabla u(e^\epsilon x)|^p\, dx = \int_{\omega^\epsilon} |\nabla u(y)|^p\, dy.$$

   Divergenzgleichung: Mit $\phi(x, j_1 u) = \frac{n-p}{p}u(x) + \nabla u(x)\cdot x$ und $\xi_k = x_k$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{d}\left(\left(\frac{n-p}{p}u(x) + \nabla u(x)\cdot x\right)pu_{x_i}|\nabla u(x)|^{p-2} - x_i|\nabla u(x)|^p\right)_{x_i} \\
&= \cancel{((n-p)u + p\nabla u\cdot x)\sum_{i=1}^{d}(u_{x_i}|\nabla u|^{p-2})_{x_i}} + \sum_{i=1}^{d}\Big(\big((n-p)u_{x_i}^2 + pu_{x_i}^2 + p\sum_{j=1}^{d}u_{x_jx_i}x_ju_{x_i}\big)|\nabla u|^{p-2}\Big) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{d}\big(|\nabla u|^p + p|\nabla u|^{p-2}\sum_{j=1}^{d}u_{x_jx_i}u_{x_j}x_i\big) = 0.
\end{aligned}$$

4. Das Vektorfeld $-y\partial_x + x\partial_y$ erzeugt die Tranformationsgruppe $(x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, t, u)$. Da die Determinante der Variablentransformation $(x,y,t) \to (x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, t)$ betragsmäßig gleich 1 ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\omega \big(u_t^2(-x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, t) - u_x^2(-x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, t) \\
&\qquad - u_y^2(-x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta + y\sin\theta, t)\big)d(x,y,t) \\
&= \int_{\omega^\theta} \big(u_t^2(x,y,t) - (-u_x(x,y,t)\sin\theta + u_y(x,y,t)\cos\theta)^2 - (u_x(x,y,t)\cos\theta + u_y(x,y,t)\sin\theta)^2\big)d(x,y,t) \\
&= \int_{\omega^\theta} \big(u_t^2(x,y,t) - u_x^2(x,y,t) - u_y^2(x,y,t)\big)d(x,y,t),
\end{aligned}$$

   d.h. es liegt eine variationelle Symmetrie vor.

   Das Vektorfeld $x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$ erzeugt die Transformationsgruppe $(e^\epsilon x, e^\epsilon y, e^\epsilon t, u)$ und die entsprechende Variablentransformation $(x,y,t) \to (e^\epsilon x, e^\epsilon y, e^\epsilon t)$ hat Determinante $e^{3\epsilon}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\omega \big(u_t^2(e^\epsilon x, e^\epsilon y, e^\epsilon t) - u_x^2(e^\epsilon x, e^\epsilon y, e^\epsilon t) - u_y^2(e^\epsilon x, e^\epsilon y, e^\epsilon t)\big)d(x,y,t) \\
&= \int_{\omega^\epsilon} \big(e^{-3\epsilon}e^{2\epsilon}(u_t^2(x,y,t) - u_x^2(x,y,t) - u_y^2(x,y,t))\big)d(x,y,t),
\end{aligned}$$

   d.h. es liegt keine variationelle Symmetrie vor.