Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 1

---

1. Dass $u(t,x) = \phi(x-ct)$ die partielle Differenzialgleichung löst, ist äquivalent dazu, dass $\phi(y)$ $(y = x-ct)$ der gewöhnlichen Differenzialgleichung $\phi''(y)+c\phi'(y)+\phi(y) = 0$ genügt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms dieser gewöhnlichen Differenzialgleichung sind $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2-4})$. Deren allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y}, && \text{falls} \quad c^2-4>0\\
\phi(y) &= (C_1 + C_2 y)e^{\lambda_1 y}, && \text{falls} \quad c^2-4=0\\
\phi(y) &= e^{\alpha y}(C_1\cos(\beta y) + C_2\sin(\beta y)), && \text{falls} \quad c^2-4<0.
\end{aligned}$$

mit $\alpha = -\frac{c}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4-c^2}$. Man muss nun nur noch y durch $x-ct$ ersetzen.

2. Schreib $y = Ax$. Dann ist $v_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} u_{y_k}$ und

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \sum_{l=1}^{n} a_{l,i} u_{y_k y_l} = \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{l,i}a_{k,i}\right) u_{y_k y_l} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k y_k} = 0.$$