ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 5

Abgabetermin: Montag, 22.11.2010 in der Vorlesung

1. Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, mit C^1 Rand (für eine Definition siehe z.B im Buch von Arendt und Urban auf Seite 220), insbesondere gilt Gauß-Green für $\Omega \cap B_R(0)$ ($B_R(0)$ der Ball mit Radius R um 0). Seien $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ und $u_1 \in C^1(\bar{\Omega})$. Zeige, dass höchstens eine Lösung $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega})$ für das Anfangswertproblem [4]

$$u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad \text{und} \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x)$$

existiert, wobei u auf dem Rand Dirichlet- oder Neumannrandbedingungen genügen und im Falle eines unbeschränkten Gebietes ferner gelten soll: Für jedes kompakte Zeitintervall $[t_1, t_2]$ findet man eine auf Ω quadratintegrierbare Funktion $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ ($\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx < \infty$) mit

$$|u_{x_i}(t,x)|, |u_{x_i t}(t,x)|, |u_t(t,x)|, |u_{tt}(t,x)| \leq g(x), \ i = 1, \ldots, d\,, \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2].$$

2. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $r > 0$. Zeige, dass für alle $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ gilt [4]

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d\phi}{dr}(r)\right).$$

3. Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $u_0 \in C^{k+2}(\mathbb{R}^{2k+1})$ und $u_1 \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1})$ definiere die Funktion u durch [4]

$$\begin{aligned} u(t,x) \quad &:= \quad \frac{1}{(2k-1)!!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1}\left(\frac{t^{2k-1}}{|\partial B_t|}\int_{\partial B_t(x)} u_0(z)d\sigma(z)\right) \\ &\quad + \frac{1}{(2k-1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1}\left(\frac{t^{2k-1}}{|\partial B_t|}\int_{\partial B_t(x)} u_1(z)d\sigma(z)\right), \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^{2k+1}. \end{aligned}$$

Zeige, dass u die $(2k+1)$-dimensionale Wellengleichung $u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x)$ löst.

4. Es sollen $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ kompakten Träger besitzen (d.h. es existiert $R > 0$, so dass $u_0(x) = 0$ bzw. $u_1(x) = 0$ für alle x mit $\|x\| \geq R$). Sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ die Lösung des Anfangswertproblems [4]

$$u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x).$$

Zeige $|u(t,x)| \leq C/t$ für alle $x \in R^3$ und $t > 0$, wobei $C > 0$ eine Konstante ist, die nicht von x abhängt.