Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 7

---

1. Da H maximalen Rang am Punkt $(x_0, j_K u_0) =: z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^n)$, $n = d + d^K$, hat, existiert $0 \le i \le n$ mit $\dfrac{\partial H}{\partial z^i}(z_0) \neq 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $z_0 = 0$ und $i = 1$ ist ($z \mapsto (z^i \leftrightarrow z^1)(z - z_0)$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus). Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert daher eine offene Umgebung $U(z_0)$ und eine C^∞-Funktion $f(z^2, \dots, z^n) =: f(\hat{z})$ (H ist C^∞), so dass $H(z) = 0 \;\Leftrightarrow z^1 = f(\hat{z})$ (also insbesondere $z_0^1 = f(\hat{z}_0)$) und $0 \neq \dfrac{\partial H(z)}{\partial z^1} =: h(z)$ für $z \in U(z_0)$. Die partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch $f_i := \dfrac{\partial f}{\partial z_i}(\hat{z}) = -\dfrac{1}{h(z)}\dfrac{\partial H(z)}{\partial z^i}$, $i = 2, \dots, n$ und $z = (f(\hat{z}), \hat{z})$. Definiere

$$\mathbf{y}(z) := h(z)(z^1 - f(\hat{z}), z^2, \dots, z^n) = (y^1, \dots, y^n) = y.$$

Da die Determinante der Jacobimatrix

$$J\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} h_{z^1}z^1 + h - h_{z^1}f & h_{z^2}z^1 - f_2 h - h_{z^2}f & \cdots & h_{z^n}z^1 - f_n h - h_{z^n}f \\ h_{z^1}z^2 & h_{z^2}z^2 + h & \dots & h_{z^n}z^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{z^1}z^n & \dots & \dots & h_{z^n}z^n + h \end{pmatrix}$$

an der Stelle $z = z_0 (= 0)$ gleich $h(0)^n \neq 0$ ist, existiert nach dem Satz über inverse Abbildungen eine Umgebung $U'(0)$, so dass $\mathbf{y}$ ein C^∞-Diffeomorphismus von $U'(0)$ nach $V(0) := \mathbf{y}(U'(0))$ ist. Insbesondere ist $\mathbf{y}(0) = 0$ und $H(z)$ geht über in $\tilde{H}(y) = H(\mathbf{y}^{-1}(y))$ mit $\tilde{H}(y) = 0$ genau dann, wenn $y^1 = 0$. Wegen $h_{z^i}z^1 - f_i h - h_{z^i}f = -f_i h = \dfrac{\partial H(z)}{\partial z^i}$ für $i = 2 \dots, n$ folgt

$$\nabla \tilde{H}(y) = \nabla H(z) \cdot (J\mathbf{y}(z))^{-1} = (1, 0, \dots, 0),$$

also $\tilde{H}(y) = y_1$ für alle $y \in V(0)$.

2. $u_t(t,x) = cu_{xx}(t,x)$ ist äquivalent zu $H(t, x, u, u_t, u_x, -u_{tt}, u_{xx}, u_{tx}) := u_t - cu_{xx} = 0$ und $\dfrac{\partial H}{\partial u_t} = 1$, d.h. die Wärmeleitungsgleichung hat vollen Rang.

3. a) $j_3 A(t, j_3 u) = \tau(t,u)\dfrac{\partial}{\partial t} + \phi(t,u)\dfrac{\partial}{\partial u} + \phi^t(t, æ_1 u)\dfrac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{tt}(t, j_2 u)\dfrac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{ttt}\dfrac{\partial}{\partial u_{ttt}}$

$$\phi^t = D_t(\phi - \tau u_t) + \tau u_t t = (\phi_t + \phi_u u_t - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2 - \tau u_{tt}) + \tau u_{tt} = \phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \tau_u u_t^2$$

$$\begin{aligned} \phi^{tt} &= D_t(\phi_t + \phi_u u_t - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2 - \tau u_{tt}) + \tau u_{ttt} \\ &= (\phi_{tt} + (2\phi_{ut} - \tau_{tt})u_t + (\phi_u - 2\tau_t)u_{tt} + (\phi_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - \tau_{uu}u_t^3 - 3\tau_u u_t u_{tt} - \cancel{\tau u_{ttt}}) + \cancel{\tau u_{ttt}} \\ \phi^{ttt} &= D_t(D_t(D_t(\phi - \tau u_t))) + \tau u_{tttt} \\ &= \phi_{ttt} + (3\phi_{ttu} - \tau_{ttt})u_t + (3\phi_{uut} - 3\tau_{ttu})u_t^2 + (3\phi_{ut} - 3\tau_{tt})u_{tt} + (3\phi_{uu} - 9\tau_{tu})u_t u_{tt} \\ &\quad + (\phi_u - 3\tau_t)u_{ttt} + (\phi_{uuu} - 3\tau_{tuu})u_t^3 - 6\tau_{uu}u_t^2 u_{tt} - 4\tau_u u_t u_{ttt} - \tau_{uuu}u_t^4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \phi^{tx} &= D_x D_t(\phi - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{txt} + \xi u_{txx} \\ &= D_x(\phi_t + \phi_u u_t - \tau_u u_t^2 - \tau u_{tt} - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \xi u_{xt}) + \tau u_{txt} + \xi u_{txx} \\ &= \phi_{tx} + (\phi_{tu} - \xi_{tx})u_x + (\phi_{ux} - \tau_{tx})u_t + (\phi_{uu} - \tau_{tu} - \xi_{ux})u_t u_x + (\phi_u - \tau_t - \xi_x)u_{tx} \\ &\quad - \tau_{ux}u_t^2 - \tau_{uu}u_x u_t^2 - 2\tau_u u_t u_{tx} - \tau_x u_{tt} - \tau_u u_x u_{tt} - \xi_{tu}u_x^2 - \xi_t u_{xx} - \xi_{uu}u_x^2 u_t - 2\xi_u u_{tx}u_x \end{aligned}$$

4. Betrachte die eindimensionale Transformationsgruppe $\mathcal{T} = (T_\epsilon)_{\epsilon \in I_(x,u)}$ auf $J^0 = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Sei $(\bar{x}, j_1\bar{u}) = (\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{x_1}, \dots, \bar{u}_{x_d}) \in J^1$ und $f(x) : U(\bar{x}) \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(\bar{x}) = \bar{u}$, $\nabla f(\bar{x}) = (\bar{u}_{x_1}, \dots, \bar{u}_{x_d})$. Schreibe $T_\epsilon(x,u) = (X_\epsilon(x,u), U_\epsilon(x,u))$. Dann geht für kleine ϵ die Funktion $f(x)$, $x \in V(\bar{x}) \subseteq U(\bar{x})$, unter T_ϵ über in die Funktion $f^\epsilon(x^\epsilon) = (U_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f]) \circ (X_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])^{-1}(x^\epsilon)$. Nach Definition ist

$$j_1 A(\bar{x}, j_1\bar{u}) = \frac{d}{d\,\epsilon}(\bar{x}^\epsilon, f^\epsilon(\bar{x}^\epsilon), \nabla f^\epsilon(\bar{x}^\epsilon))|_{\epsilon=0} = A(\bar{x}, \bar{u}) \times \frac{d}{d\,\epsilon}\nabla f^\epsilon(\bar{x}^\epsilon)|_{\epsilon=0}$$

und nach Anwendung von Ketten- und Produktregel (J bezeichne die Jacobi-Matrix)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,\epsilon}\nabla f^\epsilon(\bar{x}^\epsilon)|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\,\epsilon}\big(J(U_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x}) \cdot (J(X_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f]))^{-1}(\bar{x})\big)_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\,\epsilon}\left(J(U_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x})\right)|_{\epsilon=0} \cdot (J(X_0 \circ [\mathrm{Id} \times f])^{-1}(\bar{x}) \\
&\quad + J(U_0 \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x}) \cdot \frac{d}{d\,\epsilon}\big(J(X_0 \circ [\mathrm{Id} \times f]))^{-1}(\bar{x})\big)|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\,\epsilon}\left(J(U_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x})\right)|_{\epsilon=0} - \nabla f(\bar{x}) \cdot \frac{d}{d\,\epsilon}\left(J(X_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x})\right)|_{\epsilon=0} \\
&= J(\frac{d}{d\,\epsilon}(U_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x})|_{\epsilon=0}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot J(\frac{d}{d\,\epsilon}(X_\epsilon \circ [\mathrm{Id} \times f])(\bar{x})|_{\epsilon=0}) \\
&= \Big(D_{x_i}\phi(\bar{x}, f(\bar{x})) - \sum_{l=1}^{d} u_{x_l} D_{x_i}\xi_l(\bar{x}, f(\bar{x}))\Big)_{i=1,\dots,d},
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass $J(X_0 \circ [\mathrm{Id} \times f]))^{-1}(\bar{x})$ die Einheitsmatrix ist und für jede invertierbare Matrix $M(\epsilon)$ gilt $\frac{d}{d\,\epsilon}M^{-1}(\epsilon)|_{\epsilon=0} = -M^{-1}(0) \cdot \frac{d}{d\,\epsilon}M(\epsilon)|_{\epsilon=0}M^{-1}(0)$. Ferner hat man

$$D_{x_i}\phi(\bar{x}, f(\bar{x})) - \sum_{l=1}^{d} u_{x_l} D_{x_i}\xi_l(\bar{x}, f(\bar{x})) = D_{x_i}(\phi(\bar{x}, f(\bar{x})) - \sum_{l=1}^{d} \xi_l(\bar{x}, f(\bar{x}))u_{x_l}) + \sum_{l=1}^{d} \xi_l(\bar{x}, f(\bar{x}))u_{x_i x_l}.$$