ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 8

Abgabetermin: Montag, 13.12.2010 in der Vorlesung

1. Betrachte die einparametrische Transformationsgruppe $\mathcal{T} = (T_\epsilon)_{\epsilon \in I_{(x,u)}}$ auf $J^0 = \mathbb{R}^d \times R^l$, [4]

$$T_\epsilon(x,u) =: (X_\epsilon(x,u), U_\epsilon(x,u)) \in J^0 = \mathbb{R}^d \times R^l,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d)$ die unabhängigen und $u = (u_1, \dots, u_l)$ die von x abhängigen Variablen umfasst. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f : U(x_0) \mapsto \mathbb{R}^l$ und $(\epsilon, x, u) \mapsto T_\epsilon(x,u)$ eine C^∞-Abbildung von $W := \cup_{(x,u)\in J^0}(I_{(x,u)} \times \{(x,u)\}) \subseteq \mathbb{R} \times J^0$ nach J^0 ($\{0\} \times J^0 \subset W$).

Zeige: Es existiert ein $\delta' > 0$ und für jedes $0 \le \delta \le \delta'$ eine offene Umgebung $V_\delta(x_0) \subseteq U(x_0)$, so dass der lokale Graph $G_\delta^f := \{(x, f(x)) : x \in V_\delta(x_0)\}$ der Funktion f unter der Transformation T_δ übergeht in den lokalen Graphen $G^{f^\delta} = T_\delta(G_\delta^f)$ einer Funktion $f^\delta : X_\delta(V_\delta(x_0)) \mapsto \mathbb{R}^l$.

Hinweis: $f^\delta(x^\delta) = (U_\delta \circ [\mathrm{Id} \times f]) \circ (X_\delta \circ [\mathrm{id} \times f])^{-1}(x^\delta)$.

2. Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 1. Zeige, dass der k-Jet der einparametrische Transformationsgruppe $\mathcal{T}$ [4]

$$(j_k T_\delta)(x_0, j_k f(x_0)) := (x_0^\delta, j_k f^\delta(x_0^\delta))$$

nur von x_0, $f(x_0)$ und den Ableitungen der Ordnung $\le k$ von f an der Stelle x_0 abhängt, also wohldefiniert ist.

Hinweis: Für $k = 1$ benutze die explizite Darstellung von f^δ (siehe Aufgabe 1) und schließe dann induktiv, d.h. betrachte $j_{(k-1)}u$ als die neuen abhängigen Variablen.

3. Betrachte die Transformationsgruppe $\mathcal{T}$ aus Beispiel 5.13 [4]

$$T_\theta(x,u) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (x,u)^T, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^2 = J^0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Berechne den 1-Jet $(j_1 T_\theta)(x, u, u_x)$, $\theta \in I_{(x,u,u_x)}$, der Transformationsgruppe $\mathcal{T}$ sowie den 1-Jet $(j_1 A)(x, u, u_x)$ des infinitesimalen Erzeugers A von $\mathcal{T}$ und bestimme $I_{(x,u,u_x)}$. (Siehe Beispiel 5.18)

4. Benutze die Formeln aus Korollar 5.29, um die Punktsymmetriegruppen der zweidimensionalen Laplace-Gleichung herzuleiten [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x) = 0.$$