Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 8

---

1. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $u_0 \in \mathbb{R}^l$ und $f = (f_1, \dots, f_d) : U(x_0) \mapsto \mathbb{R}^l$ mit $f(x_0) = u_0$, $(T_\epsilon)_{\epsilon \in I_{(x,f(x)}}$ eine einparametrische Transformationsgruppe auf $J^0 \approx \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$. Schreibe $T_\epsilon =: (X_\epsilon, U_\epsilon)$. Dann gilt
$$U_\epsilon(x, f(x)) = (U_\epsilon \circ [Id \times f])(x) \quad \text{und} \quad X_\epsilon(x, f(x)) = (X_\epsilon \circ [Id \times f])(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0).$$
Ferner ist $X_0(x, f(x)) = (X_0 \circ [Id \times f])(x) = x$ und daher $\det J(X_0(x, f(x))) = 1$. Auf Grund der stetigen Abhängigkeit von $\det J(X_\epsilon(x, f(x)))$ bezüglich ϵ existiert $\delta' > 0$, so dass $\det J(X_\epsilon(x, f(x))) \neq 0$ für alle $\delta \le \delta'$. Nach dem Satz über inverse Funktionen ist $(X_\epsilon \circ [Id \times f])$, $\delta \le \delta'$, invertierbar auf einer offenen Umgebung $V_\delta(x_0)$, und man erhält $f^\delta(x^\delta) = (U_\delta \circ [Id \times f]) \circ (X_\delta \circ [Id \times f])^{-1}(x^\delta)$.

2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $u_0 \in \mathbb{R}^l$ und $f = (f_1, \dots, f_d) : U(x_0) \mapsto \mathbb{R}^l$ mit $f(x_0) = u_0$, $(T_\epsilon)_{\epsilon \in I_{(x,f(x)}}$ eine einparametrische Transformationsgruppe auf $J^0 \approx \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$.
Schreibe $T_\epsilon =: (X_\epsilon, U_\epsilon) = (X^1_\epsilon, \dots, X^d_\epsilon, U^1_\epsilon, \dots, U^l_\epsilon)$.
$(j_1 T_\epsilon)(x_0, j_1 f(x_0))$ besteht neben den Komponenten von x_0^ϵ und $f^\epsilon(x_0^\epsilon)$ aus den Einträgen $\dfrac{\partial f_i^\epsilon}{\partial x_j^\epsilon}(x_0^\epsilon)$, $j = 1, \dots, d$ und $i = 1, \dots, l$, d.h. mit Aufgabe 1 aus den Einträgen der Matrix
$$J((U_\delta \circ [\mathrm{Id} \times f]) \circ (X_\delta \circ [\mathrm{id} \times f])^{-1}(x^\delta)) = J(U_\epsilon(x_0, f(x_0))) \cdot J^{-1}(X_\epsilon(x_0, f(x_0))), \tag{1}$$
wobei die Komponenten der ersten Matrix auf der rechten Seite von der Form $\dfrac{\partial U^i_\epsilon}{\partial x_j}(x_0, f(x_0)) + \displaystyle\sum_{m=1}^{l} \frac{\partial U^i_\epsilon}{\partial f_m}(x_0, f(x_0)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0)$ sind, also nur von x_0, $f(x_0)$ und den Ableitungen erster Ordnung von f an der Stelle x_0 abhängen, und genauso die Komponenten der zweiten Matrix.
Es hänge nun $j_k T_\epsilon$ nur von x_0, $f(x_0)$ und den Ableitungen der Ordnung $\le k$ von f an der Stelle x_0 ab.
Fasse $j_k f =: \bar{f}$ als Abbildung von $U(x_0)$ nach $\mathbb{R}^{ld_k}$ auf und gemäß Induktionsvoraussetzung $j_k T_\epsilon =: \bar{T}_\epsilon$ als Transformationsgruppe auf $\bar{J}^0 := J^k$. Dann hängt $j_1 \bar{T}_\epsilon(x_0, j_1 \bar{f}(x_0))$ nur von den Ableitungen ≤ 1 von $\bar{f}$ an der Stelle x_0 ab, also von den Ableitungen $\le k+1$ von f an der Stelle x_0. Da sich jede Komponente von $(j_{k+1} T_\epsilon)(x_0, f(x_0))$ auch in $(j_1 \bar{T}_\epsilon)(x_0, \bar{f}(x_0))$ wiederfindet, ist die Behauptung bewiesen.

3. Aus (1) folgt sofort
$$(j_1 T_\theta)(x, u, u_x) = (x \cos\theta - u \sin\theta, x \sin\theta + u \cos\theta, (\sin\theta + u_x \cos\theta)(\cos\theta - u_x \sin\theta)^{-1})),$$
also $I = (-|\operatorname{arccot} u_x|, |\operatorname{arccot} u_x|)$, und nach Ableiten bezüglich θ an der Stelle $\theta = 0$
$$(j_1 A)(x, u, u_x) = (-u, x, 1 + u_x^2).$$

4. Sei $\mathbf{v} = \tau\frac{\partial}{\partial y} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial u}$ ein Vektorfeld auf J^0. $\mathbf{v}$ erzeugt genau dann eine Symmetriegruppe, wenn $(j_2\mathbf{v})(u_{xx} + u_{yy}) = \phi^{yy} + \phi^{xx} = 0$ gilt, wann immer $u_{yy} = -u_{xx}$. Man erhält

1. $(1): \quad \phi_{xx} = -\phi_{yy}$,
2. $(u_x): \quad 2\phi_{xu} - \xi_{xx} = \xi_{yy}$,
3. $(u_y): \quad -\tau_{xx} = -2\phi_{yu} + \tau_{yy}$,
4. $(u_x^1): \quad \phi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0$,
5. $(u_y^2): \quad 0 = -\phi_{uu} + 2\tau_{yu}$,
6. $(u_x u_y): \quad -2\tau_{ux} = 2\xi_{uy}$,
7. $(u_x^3): \quad -\xi_{uu} = 0$,
8. $(u_y^3): \quad 0 = \tau_{uu}$,
9. $(u_x^2 u_y): \quad -\tau_{uu} = 0$,
10. $(u_x u_y^2): \quad \xi_{uu} = 0$,
11. $(u_{xx}): \quad \phi_u - 2\xi_x = \phi_u - 2\tau_y$,
12. $(u_{xy}): \quad -2\tau_x = 2\xi_y$,
13. $(u_x u_{xx}): \quad -3\xi_u = -\xi_u$,
14. $(u_y u_{xx}): \quad -\tau_u = -3\tau_u$,
15. $(u_x u_{yx}): \quad -2\tau_u = 0$,
16. $(u_y u_{xy}): \quad -2\xi_u = 0$.

Aus 15. oder 14. bzw. 16. oder 13. folgt, dass $\tau(y,x)$ bzw. $\xi(y,x)$ nicht von u abhängen.
6., 7., 8., 9. und 10. geben keine weiteren Informationen.
4. und 5. werden zu $\phi_{uu} = 0$, was bedeutet $\phi = b(y,x)u + a(y,x)$.
11. ergibt $\xi_x = \tau_y$ und 12. $-\tau_x = \xi_y$, woraus folgt $\xi xx = \tau_{yx} = -\xi_{yy}$ und $\tau_{yy} = \xi_{xy} = -\tau_{xx}$, d.h. ξ und τ müssen die Laplace-Gleichung erfüllen.
2. verwandelt sich damit in $0 = \phi_{ux} = b_y$ und 3. in $0 = \phi_{uy} = b_y$, weshalb b eine Konstante ist.
Aus 1. erhält man noch, dass $a(y,x)$ eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung ist.

Z.B. liefert die Wahl τ bzw. ξ konstant Translationen, die Wahl $\tau = y$ und $\xi = x$ Streckungen und die Wahl $\tau = -x$ und $\xi = y$ Drehungen, während die Vektorfelder $(u + a(y,x))\partial_u$ die Linearität der Laplace-Gleichung widerspiegeln.