Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 9

Abgabetermin: Montag, 20.12.2010 in der Vorlesung

1. Sei $A = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$ der infinitesimale Erzeuger einer einparametrischen Transformationsgruppe auf $J^0 \approx \mathbb{R}^3$. Berechne den Koeffizienten ϕ^{xx} von $\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$ in $j_2 A(t, x, j_2 u)$. [4]

2. Zeige, dass [4]

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

   die d-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $\Delta\Phi(t,x) - \Phi_t(t,x) = 0$ löst.

3. Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass höchstens eine Funktion u in $C^1(\mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega})$ existiert, die die Wärmeleitungsgleichung mit Neumann- oder Dirichletranbedingungen bei beliebig, aber fest vorgegebenem Anfangswert ($u(0,x) = u_0(x)$, $x \in \Omega$) löst. [4]

   Hinweis: Finde eine geeignete Energiefunktion und schließe ähnlich wie im Fall der Wellengleichung.

4. Seien $\mathbf{v} = \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ und $\mathbf{w} = \eta_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \eta_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ zwei Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^n$; ein Vektorfeld kann aufgefasst werden als Ableitungsoperator von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathbf{v}(f(x)) = \xi_1(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$. [4]
   Zeige, dass auch der Kommutator $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$, definiert durch

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}](f(x)) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f(x))) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f(x))), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

   ein Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ bildet und bestimme die Koeffizienten ϕ_i von $[\mathbf{v},\mathbf{w}] = \phi_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \phi_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$.