Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11

Musterlösung zu Blatt 9

1.

$$\begin{aligned}
\phi^{xx} &= D_x D_x(\phi - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{xxt} + \xi u_{xxx} \\
&= D_x\big(\phi_x + \phi_u u_x - (\tau_x + \tau_u u_x)u_t - \tau u_{tx} - (\xi_x + \xi_u u_x)u_x - \xi u_{xx}\big) + \tau u_{xxt} + \xi u_{xxx} \\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_u - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t \\
&\quad + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{tx}.
\end{aligned}$$

2. $\Phi_{x_i} = \dfrac{-x_i}{2t}\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}}, \qquad \Phi_{x_i x_i} = \left(\dfrac{x_i^2}{4t^2} - \dfrac{1}{2t}\right)\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}}$

$\Delta\Phi = \big(\dfrac{\|x\|^2}{4t^2} - \dfrac{d}{2t}\big)\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} = \Phi_t.$

3. Seien u und w zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen. Dann ist $v := u - w$ eine Lösung mit Anfangswert $v(0,\cdot) \equiv 0$ und Randbedingung $v(t,y) = 0$ bzw. $\dfrac{\partial v}{\partial n}(t,y) = 0$ für alle $t \geq 0$ und $y \in \partial\Omega$.

Definiere $E(t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (\nabla v(t,x))^2\,dx$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \int_\Omega \nabla v(t,x)\cdot\nabla v_t(t,x)\,dx = -\int_\Omega (\Delta v(t,x))v_t(t,x)\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v(t,y)}{\partial n}v_t(t,y)\,d\sigma(y) \\
&= -\int_\Omega v_t^2(t,x)\,dx \leq 0.
\end{aligned}$$

Es folgt $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$, was bedeutet, dass $v(t,\cdot)$ konstant in x und wegen $v_t = \Delta v$ auch konstant in t ist, weshalb gilt $v(\cdot,\cdot) \equiv$ Konstante. Aus $v(0,\cdot) \equiv 0$ ergibt sich die Behauptung.

4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathbf{w}f) - \mathbf{w}(\mathbf{v}f) &= \sum_{j=1}^d\sum_{i=1}^d\left(\xi_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_j\eta_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^d\sum_{i=1}^d\left(\eta_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta_j\xi_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^d\left(\sum_{j=1}^d \xi_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j} - \eta_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$