Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 08.05.2019

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 1

0. Bitte melden Sie sich im Moodle für den Kurs an. Die mit einem $\star$ markierten Aufgaben sind für das Erreichen der Vorleistung abzugeben. Davon wird eine korrigiert.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine glatt parametrisierte reguläre Kurve. Sei $\varphi\colon J \to I$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung und $\tilde{c} := c \circ \varphi$. Weiter bezeichne $\kappa, \tilde{\kappa}$ die Krümmung von $c, \tilde{c}$. Zeigen Sie, dass dann gilt $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$.

2.* Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t))^T$. (10)

(a)* Zeigen Sie, dass c eine glatt parametrisierte reguläre Kurve ist.

(b)* Bestimmen Sie eine Reparametrisierung von c nach Bogenlänge.

3.* Sei $c\colon (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2, c(t) := (t, t\cos t)^T$. (10)

(a)* Skizzieren Sie $\operatorname{Im} c := \{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b)* Zeigen Sie, dass c eine glatt parametrisierte reguläre Kurve ist.

(c)* Ist c nach Bogenlänge parametrisiert?

4. Für c wie in Aufgabe 3, versuchen Sie (ohne Rechnung!) das Vorzeichen der Krümmung κ von c an den Stellen $t_0 = \frac{\pi}{4}, t_1 = \pi, t_2 = 2\pi$ zu bestimmen.

5. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine glatt parametrisierte reguläre Kurve mit Krümmung κ. Zeigen Sie: Falls $\kappa(t) = 0$ für alle $t \in I$, so liegt $\operatorname{Im} c$ in einer Geraden.