Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 2

6. Sei $c(t) = (\cos(t), \sin(2t)), t \in [0, 2\pi]$.

(a) Zeigen Sie, dass c eine glatt parametrisierte reguläre Kurve ist.

(b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

7.* Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Sei $n(t_0)$ der Normalenvektor an c in $c(t_0)$. (10)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$d(t) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0) + \frac{\operatorname{sign}(\kappa(t_0))}{\kappa(t_0)} \begin{pmatrix} \cos((t-a)\kappa(t_0)) \\ \sin((t-a)\kappa(t_0)) \end{pmatrix} \tag{1}$$

einen nach der Bogenlänge parametrisierten Kreis mit Mittelpunkt $c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0)$ und Radius $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$ beschreibt.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $c(t_0) = d(t_0)$ gilt.

(c) Mit a wie in Aufgabenteil (b), zeigen Sie $\dot{d}(t_0) = \dot{c}(t_0)$ und $\ddot{d}(t_0) = \ddot{c}(t_0)$.

Der Kreis d heißt *Schmiegekreis an c in $c(t_0)$*.

8.* Eine *euklidische Bewegung* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form $B(x) = Ax + v$ für ein $v \in \mathbb{R}^n, A \in O(n)$. Nach Aufgabe 9 sind die euklidischen Bewegungen gerade die Isometrien von $\mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass B *orientierungserhaltend* ist, falls $\det A > 0$. (10)

Sei $n = 2$, $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte reguläre Kurve und $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge bzw. Krümmung von $B \circ c$ mit der Bogenlänge bzw. Krümmung von c übereinstimmt.

9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie*, falls $|F(x) - F(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe wollen wir die Isometrien charakterisieren. Sei dazu $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung

(a) Sei F eine Isometrie. Zeigen Sie, dass dann auch $G := F - F(0)$ eine Isometrie mit $G(0) = 0$ ist.

(b) Sei F eine Isometrie mit $F(0) = 0$. Zeigen Sie: F erhält die Norm, d.h. $|F(x)| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie: Falls F die Norm erhält so erhält F auch das Skalarprodukt, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(d) Zeigen Sie: Falls F das Skalarprodukt erhält, so ist F linear. Zeigen Sie, dass dann $F(x) = Ax$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer orthogonalen Matrix $A \in O(n)$.

(e) Sei F eine Isometrie. Zeigen Sie, dass $A \in O(n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $F(x) = Ax + v$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.