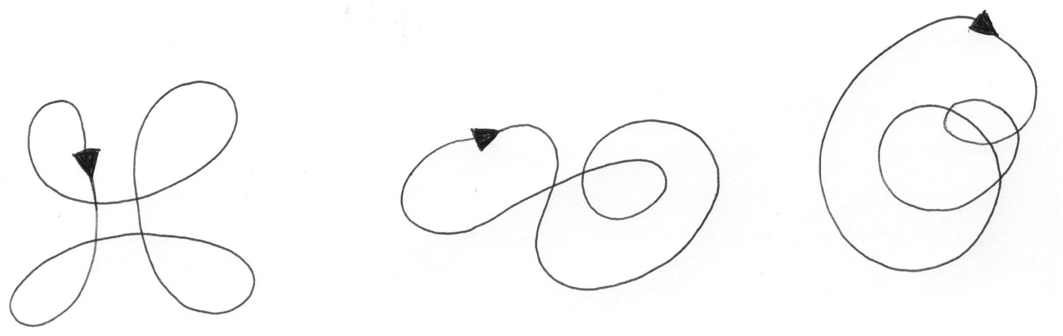
Universität Ulm
Abgabe: Mittwoch, 22.05.2019

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 3

10.* Bestimmen Sie für jede der unten dargestellten Kurven die Umlaufzahl. (10)



11.* Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve. Sei $R > 0$, sodass $|c(t)| \leq R$ für alle $t \in I$, d.h. $\operatorname{Im} c$ liegt in einer Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung. Zeigen Sie: Falls es $t_0 \in I$ gibt mit $|c(t_0)| = R$, dann gilt $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) := |c(t)|^2$.

12. Sei $0 < a < b, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$.

(a) Zeigen Sie: c ist eine einfach geschlossene Kurve und periodisch mit minimaler Periode 2π.

(b) Zeigen Sie. dass die Krümmung gegeben ist durch

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}}.$$

(c) Wir sagen, dass eine Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ einen *Scheitel* in $t_0 \in I$ hat, falls $\dot\kappa(t_0) = 0$. Zeigen Sie, dass c aus (a) in einer Periode genau 4 Scheitel hat.

13. Eine Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls für jeden Punkt gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

In dieser Aufgabe wollen wir eine äquivalente Charakterisierung der Konvexität von Kurven beweisen. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve mit Krümmung κ.

(a) Zeigen Sie, dass c konvex ist genau dann, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

(i) für alle $t, t_0 \in I$ gilt $\langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\rangle \geq 0$, oder
(ii) für alle $t, t_0 \in I$ gilt $\langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\rangle \leq 0$.

Hinweis: Eine Richtung ist trivial. Für die andere betrachten Sie die Mengen $I_1 = \{t_1 \in I \mid \forall t \in I \text{ gilt } \langle c(t) - c(t_1), n(t_1)\rangle \geq 0\}$ *und* $I_2 = \{t_1 \in I \mid \forall t \in I \text{ gilt } \langle c(t) - c(t_1), n(t_1)\rangle \leq 0\}$ *und verwenden Sie, dass* I *zusammenhängend ist.*

(b) Zeigen Sie: Falls c konvex ist, dann gilt $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in I$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in I$.
Hinweis: Verwenden Sie die Taylor Entwicklung von c *in* t_0.