Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 29.05.2019

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 4

14. Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve. In dieser Aufgabe wollen wir die Rückrichtung von Aufgabe 13 beweisen, d.h.

$$\text{Falls } \kappa(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ oder } \kappa(t) \leq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \text{ so is } c \text{ konvex.} \qquad (*)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir im Folgenden an, dass $\kappa(t) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Sei L die minimale Periode von c. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Winkelfunktion aus Lemma 1.18. Zeigen Sie, dass θ monoton wachsend ist und $\theta(t_0 + L) - \theta(t_0) = 2\pi$.

(b) Zeigen Sie

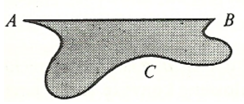
$$f(t) := \langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\rangle = \int_{t_0}^{t} \sin\left(\theta(\tau) - \theta(t_0)\right) \mathrm{d}\tau \text{ für } t \in [t_0, t_0 + L].$$

(c) Zeigen Sie, dass es $t_1 \in (t_0, t_0 + L)$ gibt mit $\sin(\theta(\tau) - \theta(t_0)) \geq 0$ für $\tau \in [t_0, t_1]$ und $\sin(\theta(\tau) - \theta(t_0)) \leq 0$ für $\tau \in [t_1, t_0 + L]$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Für $\tau \in [t_0, t_0 + L]$ überstreicht $\theta(\tau) - \theta(t_0)$ das Intervall $[0, 2\pi]$. Verwenden Sie dazu (a).

(d) Folgern Sie $f(t) \geq 0$ für $t \in [t_0, t_0 + L]$ und daraus $(*)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $f(t_0) = f(t_0 + L) = 0$. Verwenden Sie dazu (b).

15.* Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $A \neq B$ und $\ell > |A - B|$. Sei $\overline{AB} := \{A + t(B - A) \mid t \in [0, 1]\}$ und sei $\mathcal{C}$ die Menge aller injektiven Kurven c, die A mit B verbinden, sodass $\operatorname{Im} c$ ganz auf einer Seite von $\overline{AB}$ liegt und $\operatorname{Im} c \cap \overline{AB} = \{A, B\}$ erfüllt. (10)

Zeigen Sie, dass die Verbindungskurve $c \in \mathcal{C}$ der Länge ℓ, die zusammen mit $\overline{AB} := \{A + t(B - A) \mid t \in [0, 1]\}$ den größtmöglichen Flächeninhalt umschließt ein Kreisbogen durch A und B ist. *Hinweis: Sie können benutzen, dass die isoperimetrische Ungleichung auch für nur stückweise glatte einfach geschlossene Kurven gilt.*



16.* Berechnen Sie für die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)^T$ die Krümmung κ, die Torsion τ, sowie das begleitende 3-Bein an $t \in \mathbb{R}$. (10)