Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 12.06.2019

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 5

18.* Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre glatt parametrisierte Kurve, $t_0 \in I$. Sei wie im Beweis von Satz 1.10, $\psi\colon I \to [0, L]$ die Bogenlängenfunktion von c mit $L := L(c)$ und $\varphi\colon [0, L] \to I$ deren Umkehrfunktion. (10)

(a) Zeigen Sie $\varphi(0) = t_0$, $\dot{\varphi}(0) = \frac{1}{|\dot{c}(t_0)|}$ und $\ddot{\varphi}(0) = -\frac{\langle \dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)\rangle}{|\dot{c}(t_0)|^4}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Krümmung κ von c gegeben ist durch

$$\kappa(t_0) = \frac{|\dot{c}(t_0) \times \ddot{c}(t_0)|}{|\dot{c}(t_0)|^3}.$$

Hinweis: Für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt die Identität $|x|^2\,|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 = |x \times y|^2$.

19. Sei c wie in Aufgabe 18, $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für den Normalenvektor n und den Binormalenvektor b von c Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} n(t_0) &= \frac{|\dot{c}(t_0)|}{|\dot{c}(t_0) \times \ddot{c}(t_0)|}\left(\ddot{c}(t_0) - \frac{1}{|\dot{c}(t_0)|^2}\langle \dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)\rangle \dot{c}(t_0)\right) \\ b(t_0) &= \frac{1}{|\dot{c}(t_0)|}\dot{c}(t_0) \times n(t_0). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Torsion τ von c gegeben ist durch

$$\tau(t_0) = \frac{\det\left(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0), \dddot{c}(t_0)\right)}{|\dot{c}(t_0) \times \ddot{c}(t_0)|^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 18 und (a) sowie die folgenden Identität für das Spatprodukt: Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, dann gilt $\langle x, y \times z\rangle = \det(x, y, z)$.

20.* Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre glatt parametrisierte Raumkurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Man finde das Transformationsverhalten von Krümmung, Torsion und des begleitenden Dreibeins von c unter Bewegungen des euklidischen Raumes. (10)

21. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve, sodass die $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$ und $\dot{\kappa}(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$R^2 + \dot{R}^2 T^2 \text{ ist konstant auf } I,$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $c(I)$ auf einer Sphäre liegt. Dabei ist $R = \frac{1}{\kappa}, T = \frac{1}{\tau}$.

Die Übung am 05.06.2019 entfällt. Die Abgabefrist von Blatt 5 wird auf den 12.06.2019 verschoben.