Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp

Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 6

23. Seien $u \neq v \in \mathbb{S}^2$ und $c\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2$ eine reguläre injektive glatt parametrisierte Kurve mit $c(a) = u, c(b) = v$. Sei E die eindeutige Ebene durch u, v und den Ursprung. Dann ist $S := E \cap \mathbb{S}^2$ ein Kreisbogen, der durch u und v zweigeteilt wird. Sei S_0 der kürzere Teil dieses Kreisbogens. Wir wollen zeigen, dass die Länge von c größer ist als die Länge von S_0.

(a) Begründen Sie, warum ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$, sowie $u_1, v_1 \geq 0$ angenommen werden kann. *Hinweis: Verwenden Sie eine euklidische Bewegung.*

Im Folgenden können Sie annehmen, dass glatte Funktionen $\varphi, \theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren sodass $c(t) = (\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \sin\theta(t)\sin\varphi(t), \cos\theta(t))^T$ für alle $t \in [a,b]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{c}(t) = (\sin\theta(t), 0, \cos\theta(t))^T$ einen Teil von S beschreibt.

(c) Zeigen Sie $|\dot{c}(t)|^2 \geq \left|\dot{\bar{c}}(t)\right|^2$ für alle $t \in [a,b]$ und folgern Sie $L(c) \geq L(\bar{c})$.

(d) Überzeugen Sie sich, dass die Länge von S_0 durch $|\theta(b) - \theta(a)|$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $L(c) \geq |\theta(b) - \theta(a)|$ gilt mit Gleichheit, genau dann, wenn c eine injektive Parametrisierung von S_0 ist.

24.* Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine periodische, reguläre glatt parametrisierte Kurve mit minimaler Periode L, $e \in \mathbb{S}^2$. Wie in Definition 1.41 sei (10)

$$\mu(c,e) = \#\{\text{lokale Maxima in } [0,L) \text{ der Funktion } t \mapsto \langle c(t), e\rangle\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Zeigen Sie $\mu(c,e) = \mu(c,-e)$.

25.* Betrachten Sie die Abbildung $G\colon \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)^T\} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch (10)

$$G(p_1,p_2,p_3) := \begin{pmatrix} \frac{p_1}{1-p_3} \\ \frac{p_2}{1-p_3}. \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass G bijektiv ist und berechnen Sie $F = G^{-1}$. Des weiteren zeige man, dass F *konform* ist, d.h.

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u_1}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial u_2}\right|, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2} \right\rangle = 0.$$