Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 7

26. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ glatt. Zeigen Sie, dass die maximale Rangbedingung (ii) in Definition 2.1 äquivalent ist zur Bedingung

(ii') $\partial_{u_1} F(u) \times \partial_{u_2} F(u) \neq 0$ für alle $u \in U$.

Hinweis: Verwenden Sie erneut die Identität $|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2 = |x \times y|^2$ *für* $x, y \in \mathbb{R}^3$.

27.* Sei $a > 0$, $f\colon (0,a) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachten Sie den Graph von $f|_{(0,a)}$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge (10)

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x), z = 0 \text{ und } x \in (0, a)\}.$$

Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\mathcal{G}(f)$ durch Rotation bezüglich der x-Achse erhält.

(a) Unter welchen zusätzlichen Annahmen an f ist S eine reguläre Fläche?

Sei f so gewählt, dass S eine reguläre Fläche ist.

(b) Seien $p_0, p_1 \in S$. Berechnen Sie die Tangentialebene von S in p_0. Welche Relation gilt zwischen den Tangentialebenen $T_{p_0}S$ und $T_{p_1}S$, falls $p_0^1 = p_1^1$, d.h. falls die ersten Koordinaten von p_0 und p_1 übereinstimmen?

28.* Seien $a, b, c > 0$ und (10)

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(a) Begründen Sie, dass S_1 und S_2 reguläre Flächen sind.

(b) Zeigen Sie, dass S_1 und S_2 diffeomorph sind.

29. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, $f\colon S_1 \to S_2$ glatt und $p_0 \in S_1$. Zeigen Sie, dass das Differential $\mathrm{d}f(p_0)\colon T_{p_0}S_1 \to T_{f(p_0)}S_2$ aus Definition 2.8 wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Kurve c abhängt. Zeigen Sie außerdem, dass $\mathrm{d}f(p_0)$ eine linear Abbildung ist.
Hinweis: Verwenden Sie lokale Koordinaten, um eine Darstellung des Differentials zu erhalten, in der c *nicht länger auftaucht. Schreiben Sie dazu* $f \circ c$ *als Verkettung von Abbildungen, die im herkömmlichen Sinne glatt sind (siehe Bemerkung 2.10 (b)).*