Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp
Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 8

30.* Sei S eine reguläre Fläche, (U, F, V) eine lokale Parametrisierung nahe $p_0 = F(u_0)$ mit induzierter erster Fundamentalform $(g_{ij})_{i,j}$. Sei $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ eine weitere lokale Parametrisierung nahe $p_0 = \tilde{F}(\tilde{u}_0)$. Wie kann man die induzierte erste Fundamentalform $(\tilde{g}_{ij})_{i,j}$ durch $(g_{ij})_{i,j}$ ausdrücken? Finden Sie eine Beziehung analog zu Bemerkung 2.10 (a). (10)
Hinweis: Verwenden Sie die glatte Koordinatenwechselabbildung aus Folgerung 2.5.

31.* Seien A, f, S wie in Aufgabe 27 mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, a)$. (10)

(a)* Berechnen Sie die erste Fundamentalform von S in den lokalen Koordinaten

$$(\varphi, x) \mapsto (x, f(x)\cos\varphi, f(x)\sin\varphi)^T.$$

(b)* Seien nun $a = 1$ und $f(x) = \frac{1}{b}\cosh(bx)$ mit $b > 0$. Skizzieren Sie S in diesem Fall und berechnen Sie den Flächeninhalt von S.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Menge $\{(x, f(x), 0) \mid x \in (0, a)\}$ vernachlässigen.

(c)* Zeigen Sie, dass S orientierbar ist.

32. **(Das Möbiusband)** Es sei S das Bild der Abbildung $F \colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(t, s) := ((1 + s\cos t)\cos(2t), (1 + s\cos t)\sin(2t), s\sin t)^T.$$

Zeigen Sie, dass F injektiv ist und die maximale Rangbedingung (ii) in Definition 2.1 erfüllt. Man kann sogar zeigen, dass S eine reguläre Fläche ist. Ist S orientierbar?