Universität Ulm

Prof. Dr. Anna Dall'Acqua
Fabian Rupp

Abgabe: Mittwoch, 17.07.2019

Sommersemester 2019
Punktzahl: 10

Übungen Elementare Differentialgeometrie: Blatt 10

Definition 2.30. *Eine reguläre Fläche* $S \subset \mathbb{R}^3, S \neq \emptyset$ *heißt* Minimalfläche, *falls* $H(p) = 0 \quad \forall p \in S$.

Bemerkung Man kann zeigen, dass Minimalflächen die kritischen Punkte des Flächenfunktionals sind.

Satz 2.31. *Sei* $S \subset \mathbb{R}^3$ *eine orientierte reguläre Fläche. Dann gilt* $H^2 \geq K$. *Insbesondere gibt es keine kompakten orientierbaren Minimalflächen.*

36.* Beweisen Sie Satz 2.31.

37.* Berechnen Sie die mittlere Krümmung H und die Gaußkrümmung K von S, falls

(a)* $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre ist. Bestimmen die außerdem die Hauptkrümmungen.

(b)* S eine Rotationsfläche wie in den Aufgaben 27, 31 und 34 ist.

(c)* S ein Graph wie in Aufgabe 35 ist.

Berechnen Sie H und K außerdem explizit, falls S eine Ebene der Form $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$ bzw. ein Zylinder (vgl. Aufgabe 34) ist.

38. (Bedeutung der Normalkrümmung aus Bemerkung 2.24) Sei S eine orientierbare reguläre Fläche, $p \in S$. Sei $x \in T_pS$ mit $|x| = 1$ und $N := N(p)$ die Einheitsnormale. Sei $E := \operatorname{span}\{x, N\}$. Wir wollen zeigen, dass

(i) $(E + p) \cap S$ nahe p eine reguläre ebene Kurve ist, d.h. eine Kurve, welche in einer Ebene enthalten ist.

(ii) die (ebene) Krümmung der Kurve in p (bei geeigneter Wahl des Durchlaufsinnes) durch $\kappa_{nor}(p, x)$ gegeben ist.

Zum Beweis:

(a) Schreiben Sie $(E + p) \cap S$ lokal um p als Nullniveaumenge einer glatten Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ wobei $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von p ist.
Hinweis: Zunächst lässt sich S *nahe* p *als Nullniveaumenge einer reellwertigen Funktion* f_1 *schreiben. Für* $y := x \times N$ *definieren Sie* $f_2(w) := \langle w - p, y\rangle$ *und betrachten dann* $f := (f_1, f_2)^T$.

(b) Zeigen Sie, dass $(E + p) \cap S$ nahe p das Bild einer regulären Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist und folgern Sie (i). *Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz über Implizite Funktionen. Zeigen Sie dazu, dass für die in (a) konstruierte Abbildung* $\operatorname{rang} Df(p) = 2$ *gilt.*

(c) Zeigen Sie, dass die Kurve c aus (b) regulär ist und planar mit $\operatorname{Im} c \subset E$. Zeigen Sie, dass die Normale in der Ebene E an die ebene Kurve c im Punkt $c(t_0)$ gegeben ist durch $\pm N$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\dot{c}(t_0) \in T_pS \cap E$ *und* $\dot{c}(t_0) \parallel x$, *wobei* $t_0 \in I$ *mit* $c(t_0) = p$.

(d) Folgern Sie daraus (ii). *Hinweis: Benutzen Sie eine Bogenlängenparametrisierung* $\tilde{c}$ *von* c *und zeigen Sie* $\dot{\tilde{c}}(t_0) = \pm x$ *für ein geeignetes* t_0. *Verwenden Sie dann den Satz von Meusnier (Satz 2.23) um das Vorzeichen zu diskutieren.*