Universität Ulm
Besprechung:
25.11.14, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

1. Sei M ein kompakter metrischer Raum und $(Y, ||\cdot||)$ ein Banachraum. Sei $\mathcal{C}(M;Y)$ mit der Supremumsnorm der Banachraum aus Aufgabe **6.** vom letzten Blatt.

(i) Zeige, dass jede präkompakte Teilmenge von $\mathcal{C}(M;Y)$ beschränkt und gleichgradig stetig ist. (2)

(ii) Zeige: Ist $A \subset \mathcal{C}(M;Y)$ präkompakt, so ist für jedes $x \in M$ die Menge (1)

$$A(x) = \{f(x) \,\big|\, f \in A\} \subset Y$$

präkompakt.

(iii) Zeige, dass der Satz von Arzelà-Ascoli im Allgemeinen falsch ist, wenn der Bildraum Y nicht endlichdimensional ist. (3)
Hinweis: Betrachte $\left\{T|_{\overline{B_1(0)}}; T \in \mathcal{L}(X;Y), ||T|| \leq 1\right\}$ für geeignete Räume X und Y.

2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $A \subset \mathcal{C}^{0,\beta}(M;\mathbb{R}^N)$ beschränkt. Zeige, dass $A \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(M;\mathbb{R}^N)$ präkompakt ist. (5)
Hinweis: Zeige, dass der Abschluss von A in $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M;\mathbb{R}^N)$ folgenkompakt ist.

3. Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum. Zeige, dass V eine Basis besitzt. (3)
Hinweis: Lemma von Zorn.

4. Es sei X ein Vektorraum, $A \subset X$. Definiere $p_A : X \to [0,\infty]$ durch

$$p_A(x) := \inf\left\{\lambda > 0 \,\Big|\, \frac{x}{\lambda} \in A\right\}.$$

Sei X im Folgenden ein normierter Raum.

(i) Bestimme $p_A(x)$ für $A = B_1(0)$. (1)

Sei $U \subset X$ konvex und 0 liege im Inneren von U. Zeige:

(ii) $p_U(x) < \infty$ für alle $x \in X$, genauer: Ist $B_\varepsilon(0) \subset U$, so ist $p_U(x) \leq \frac{||x||}{\varepsilon}$. (1)
Bemerkung: Ist $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in X$, so heißt p_A absorbierend.

(iii) p_U ist sublinear. (2)

(iv) Ist U offen, so ist $U = p_U^{-1}([0,1))$. (2)