Universität Ulm

Besprechung:
02.12.14, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

1. (i) Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ dicht und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede gleichmäßig stetige Funktion $F : A \to Y$ eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$. (2)

(ii) Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $U \subset X$ ein dichter Unterraum und $T \in \mathcal{L}(U, Y)$. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf X, und es ist $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$. (2)

2. Eine lineare Abbildung $\mathrm{Lim} : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls gilt:

(L1) $\mathrm{Lim}((1, 1, 1, \ldots)) = 1$,

(L2) $\mathrm{Lim}(x) \geq 0$ falls $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(L3) $\mathrm{Lim}(Lx) = \mathrm{Lim}(x)$, wobei L der Linksshift von Blatt 3, Aufgabe **2.**(iii) ist.

(i) Sei Lim ein Banachlimes. Zeige:

(a) $\mathrm{Lim} \in (\ell^\infty)'$ mit $||\mathrm{Lim}|| = 1$. (1)

(b) $\liminf x \leq \mathrm{Lim}(x) \leq \limsup x$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $\mathrm{Lim}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für alle konvergenten Folgen x. (2)

(c) Das Funktional Lim ist nicht multiplikativ, das heißt es gibt $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Lim}(xy) \neq \mathrm{Lim}(x)\,\mathrm{Lim}(y)$, wobei $(xy)_n := x_n y_n$ ist. (1)

(ii) Zeige, dass ein Banachlimes existiert. (3)

Hinweis: Zeige zunächst, dass $p(x) := \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ ein sublineares Funktional auf ℓ^∞ definiert.

3. Zeige, ohne Aufgabe **4.** zu verwenden: Die Abbildung (3)

$$T : \ell^1 \to (\ell^\infty)', \; (Tx)(y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$$

ist isometrisch, aber nicht surjektiv.

Hinweis: Aufgabe **2.**

4. Zeige:

(i) Für einen normierten Raum X ist äquivalent: (3)

(a) X ist separabel.

(b) Es gibt eine abzählbare Menge A mit $X = \overline{\mathrm{span}\, A}$.

(ii) Ein normierter Raum mit separablem Dualraum ist selbst separabel. (3)