Universität Ulm
Besprechung:
09.12.14, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8

1. Sei X ein normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren T^n induktiv durch $T^0 := \mathrm{Id}_X$ und $T^n = T \circ T^{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) Ist X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $||T|| < 1$, so ist $\mathrm{Id} - T$ invertierbar mit $(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ und es gilt $\left|\left|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\right|\right| \leq (1 - ||T||)^{-1}$. (4)
Hinweis: Insbesondere ist die Konvergenz der Reihe zu zeigen.

(ii) Ist X ein Banachraum, so ist die Teilmenge der invertierbaren Operatoren offen in $\mathcal{L}(X)$. (2)

2. Seien X, Y Banachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear. Zeige: B ist stetig genau dann, wenn B partiell stetig ist, d.h. für alle $x \in X$ ist $y \mapsto B(x, y)$ stetig und für $y \in Y$ ist $x \mapsto B(x, y)$ stetig. (2)

3. Es seien $||\cdot||$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf einem Vektorraum X, die beide X zu einem Banachraum machen, und es gebe ein $C \geq 0$ mit $||x|| \leq C\,|||x|||$ für alle $x \in X$. Zeige, dass die beiden Normen bereits äquivalent sind. (2)

4. (i) Es sei H ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. Zeige, dass gilt: $H \cong \ell^2$. (2)

(ii) Es seien X und Y normierte Räume und $X \cong Y$. Zeige, dass gilt: $Y' \cong X'$. (1)

(iii) Es bezeichne $c \subset \ell^\infty$ den Unterraum der konvergenten Folgen. (2)
Zeige: Es ist $c_0 \cong c$ und folgere $\ell^1 \cong c'$.

5. (i) Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$. (3)
Zeige, dass M beschränkt ist genau dann, wenn $\{x'(x) \mid x \in M\} \subset \mathbb{K}$ beschränkt ist für alle $x' \in X'$.

(ii) Sei X ein Banachraum, $M' \subset X'$. (2)
Zeige, dass M' beschränkt ist genau dann, wenn $\{x'(x) \mid x' \in M'\} \subset \mathbb{K}$ beschränkt ist für alle $x \in X$.