Universität Ulm

Besprechung:
20.01.15, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

18 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

1. Für welche $p \geq 1$ ist die Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}$ in $W^{1,p}(0,1)$? (2)

2. Es sei H ein reeller Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear. Wir haben bereits gesehen, dass äquivalent sind:

(a) B ist stetig

(b) B ist partiell stetig

(c) $\exists M \geq 0 : \forall x, y \in H : |B(x,y)| \leq M\,||x||\,||y||$.

Zeige:

(i) Ist B stetig, so gibt es ein $T \in L(H)$ mit $B(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in H$. (2)

(ii) Gibt es zusätzlich ein $m > 0$ mit $B(x,x) \geq m\,||x||^2$ für alle $x \in H$, so ist T invertierbar mit $\left|\left|T^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{m}$. (3)

(iii) Ist B stetig und erfüllt die Voraussetzung von (ii), und ist $f \in H'$, so existiert ein eindeutiges $x \in H$ mit $f(y) = B(x,y)$ für alle $y \in H$. (1)

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Wir betrachten für $\lambda \geq 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ das Problem

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wir nennen eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung dieses Problems, falls gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(i) Zeige: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung von $(*)$, so ist u auch eine schwache Lösung. (3)

(ii) Zeige: Für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. (2)

4. Es sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Untervektorraum von X. Bekanntlich bilden die Äquivalenzklassen $[x] := x + U$ mit den Operationen $[x] + [y] = [x+y]$, $\alpha[x] = [\alpha x]$ den Quotientenraum X/U. Zeige:

(i) $||[x]|| := \operatorname{dist}(x, U)$ definiert eine Halbnorm auf X/U. (2)

(ii) Ist U abgeschlossen, so ist $||\cdot||$ eine Norm auf X/U. (1)

(iii) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist X/U ein Banachraum. (2)
Hinweis: Ist $([x_n])$ eine Cauchyfolge in X/U, so finde zunächst eine Teilfolge mit $\left|\left|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\right|\right| \leq 2^{-k}$.