Universität Ulm
Besprechung:
27.01.15, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

1. Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $X = \ell^p$.

(i) Sei $U := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p \,\big|\, x_1 = 0\}$. (2)
Zeige, dass U ein abgeschlossener Unterraum von X ist, bestimme $\dim {}^X\!/_U$ und zeige $U \cong X$.

(ii) Sei $U := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p \,\big|\, x_{2k} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$. (2)
Zeige, dass U ein abgeschlossener Unterraum von X ist, zeige $U \cong X \cong {}^X\!/_U$ und bestimme $\dim {}^X\!/_U$.

2. (i) Es seien X, Y zwei Banachräume und $T \in L(X, Y)$. (2)
Zeige: T ist injektiv und das Bild $R(T) \subset Y$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ein $\alpha > 0$ existiert mit $||Tx|| \geq \alpha\, ||x||$ für alle $x \in X$.

(ii) Finde zwei Banachräume X, Y und einen stetigen Operator $T : X \to Y$, dessen Bild nicht abgeschlossen ist. (1)

3. (i) Es sei $1 \leq p < \infty$, $X = L^p[0,1]$ und $m \in L^\infty[0,1]$. (2)
Zeige, dass $T_p : X \to X, f \mapsto mf$ ein Operator in $L(X)$ ist und bestimme die Adjungierte T_p'.

(ii) Es sei $k \in L^2([0,1]^2)$. Zeige dass für den Operator T, welcher fast überall definiert sei durch (3)

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt: $T \in L(L^2[0,1], L^2[0,1])$ und bestimme T'.

4. Es sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum. Zeige: $(U^\perp)_\perp = \bar{U}$. (3)

5. Es seien H_1, H_2 zwei Hilberträume über $\mathbb{K}$ und $T \in L(H_1, H_2)$. Zeige, dass T eine Isometrie ist genau dann, wenn gilt: (2)

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in H_1.$$

6. Es sei H ein Hilbertraum, $T : H \to H$ linear und T erfülle (3)

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \text{ für alle } x, y \in H.$$

Zeige, dass T dann stetig und selbstadjungiert ist.