Universität Ulm
Besprechung:
03.02.15, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 14

1. Es sei $k \in \mathcal{C}([0,1]^2)$, $X := \mathcal{C}([0,1])$ und $T : X \to X$ definiert durch (2)

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zeige, dass T ein kompakter Operator ist.

2. Es sei (X,d) ein metrischer Raum, (x_n) eine Folge in X, $x \in X$. Zeige: (2)
$x_n \to x$ genau dann, wenn jede Teilfolge von x_n eine Teilfolge besitzt, welche gegen x konvergiert.

3. Es seien X, Y Banachräume.

(i) Zeige, dass für $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ gilt: Ist (x_n) eine Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$, so folgt $Tx_n \to Tx$. (3)

(ii) Es sei X reflexiv und $T : X \to Y$ linear mit $Tx_n \to Tx$ für alle Folgen $(x_n) \subset X$ mit $x_n \rightharpoonup x$. Zeige, dass T kompakt ist. (2)

4. Es seien X, Y Banachräume.

(i) Es sei $T \in L(X,Y)$ mit $\dim R(T) < \infty$. Zeige: $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. (1)

(ii) Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(X,H)$. Zeige, dass T kompakt ist genau dann, wenn eine Folge $(T_n) \in L(X,H)$ existiert mit $\dim R(T_n) < \infty$ und $T_n \to T \in L(X,H)$. (4)
Hinweis: Orthogonale Projektion.

5. Es sei $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{K})$. Definiere wie in Blatt 4, **1.** die Abbildung $T_\lambda \in L(\ell^2)$ durch die punktweise Multiplikation

$$T_\lambda : \ell^2 \to \ell^2,\ x \mapsto \lambda x.$$

(i) Bestimme $\sigma_p(T_\lambda)$ und $\sigma(T_\lambda)$. (3)

(ii) Charakterisiere $\{M \subset \mathbb{K} \,|\, \exists\, T \in L(\ell^2) \text{ mit } \sigma(T) = M\}$. (3)

Information: Zum Bestehen der Vorleistung sind 115 Punkte hinreichend. Nächste Woche wird ein letztes Blatt herausgegeben.