Universität Ulm

Besprechung:
10.02.15, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

21* Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 15

1. Es sei $X = \mathcal{C}[0,1]$ und $T \in L(X)$ definiert durch (4*)

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Zeige: $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.
Hinweis: Verwende die Methode der Variation der Konstanten aus der Theorie gewöhnlicher DGLn.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand, $X := L^2(\Omega)$ und $T : X \to X,\ f \mapsto u$, wobei $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \subset X$ die schwache Lösung der

$$\text{(Poisson-Gleichung)} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \quad\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

sei, das heißt u erfüllt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ [vgl. Blatt 12 **3.**]. Zeige:

(i) T ist selbstadjungiert. (1*)

(ii) T ist kompakt. (2*)

(iii) $0 \in \sigma_c(T)$. (2*)

Hinweis:
Es darf ohne Beweis folgender **Einbettungssatz von Rellich** verwendet werden:
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit glattem Rannd, so ist die Inklusion $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

3. Es sei $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ und $T_\lambda \in L(\ell^2)$ gegeben durch $T_\lambda : \ell^2 \to \ell^2,\ x \mapsto \lambda x$. Zeige:

(i) T ist kompakt $\iff$ $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$. (3*)

(ii) T ist selbstadjungiert $\iff$ $\operatorname{Im}\lambda_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist T normal? (1*)

4. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeige:

(i) T ist normal $\iff$ $||Tx|| = ||T^*x||$ für alle $x \in H$. (2*)

(ii) Ist T normal, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $X \neq \{0\}$, so ist (3*)

$$\sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \le r(T) = ||T||\,.$$

5. Zeige, dass die Voraussetzung an die Abgeschlossenheit des Bildes bei der Definition eines Fredholm-Operators redundant ist, genauer: (3*)
Sind X, Y zwei Banachräume und $T \in L(X,Y)$ mit $\operatorname{codim} R(T) < \infty$, so ist $R(T)$ abgeschlossen.