Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

1. Es sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einer Norm $||\cdot||_0$.

(i) Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von X. Definiere (2)

$$||\cdot||_1 : X \to \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\,.$$

Zeige, dass $||\cdot||_1$ eine Norm auf X ist und eine positive Konstante $C > 0$ existiert mit

$$||x||_0 \leq C\,||x||_1 \ \text{ für alle } x \in X.$$

(ii) Definiere $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||_0$. (3)

Zeige, dass f auf $S := \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\}$ sein strikt positives Minimum annimmt und verwende dies, um zu zeigen, dass gilt:

$$||x||_0 \geq \min_{\alpha \in S} f(\alpha)\,||x||_1 \ \text{ für alle } x \in X.$$

(iii) Folgere, dass alle Normen auf X äquivalent sind, und X stets ein Banachraum ist. (2)

2. (i) Es seien X und Y normierter Räume, X endlichdimensional. Zeige, dass jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig ist. (2)

(ii) Es sei $Y := \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ mit der Norm $||f||_{\mathcal{C}^0} := \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ und $X := \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ mit der Norm $||f||_{\mathcal{C}^1} := ||f||_{\mathcal{C}^0} + ||f'||_{\mathcal{C}^0}$. (3)
Zeige, dass die Abbildung $T : X \to Y,\ f \mapsto Tf$, definiert durch $(Tf)(x) = f'(x)$ für $x \in [0,1]$ stetig ist und bestimme die Operatornorm von T.

(iii) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Definiere (4)

$$L : \ell_p \to \ell_p,\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

und

$$R : \ell_p \to \ell_p,\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

Zeige, dass R und L stetig sind und berechne ihre Normen.

3. Es sei $X := \{f \in \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ mit der Norm $||f||_{\mathcal{C}^0} := \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$. Zeige:

(i) $Y := \{f \in X \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$ ist ein abgeschlossener, echter Unterraum des Banachraumes X. (1)

(ii) $\operatorname{dist}(f,Y) = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$, wobei der Abstand in X gemeint ist, also (2)

$$\operatorname{dist}(f,Y) = \inf\{||f-g||_{\mathcal{C}^0} \mid g \in Y\}.$$

Hinweis: Verwende dazu die Folge $h_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}}$.

(iii) Der Abstand wird nie angenommen, also (1)

$$||f-g||_{\mathcal{C}^0} > \operatorname{dist}(f,Y)$$

für alle $g \in Y,\ f \in X \setminus Y$.

Hinweis: Prüfe zunächst, dass für alle $h \in X \setminus \{0\}$ gilt: $\left|\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x\right| < ||h||_{\mathcal{C}^0}$.