Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 4

Sei M ein topologischer Raum, $A \subset M$ abgeschlossen und $U \subset M$ eine offene Menge, welche A enthält. Eine stetige Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{R}$ heißt Testfunktion (engl.: bump function) für A mit Träger in U, wenn gilt: $0 \leq \varphi \leq 1$ auf M, $\varphi \equiv 1$ auf A und $\operatorname{supp} \varphi \subset U$.

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$ und jede offene Menge $U \subset M$, welche A enthält, eine glatte Testfunktion für A mit Träger in U existiert.

Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $A \subset M$ beliebig. Eine Abbildung $F : A \to N$ heißt glatt (auf A), falls sie für jeden Punkt aus A eine glatte Fortsetzung auf eine Umgebung des Punktes besitzt, das heißt: Für jedes $p \in A$ existiert ein $W_p \subset M$ offen mit $p \in W_p$ und eine glatte Abbildung $\tilde{F}_p : W_p \to N$, deren Restriktion auf $W_p \cap A$ mit F übereinstimmt.

2. (i) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}^k$ glatt. Zeige, dass für jede offene Menge U, welche A enthält, eine glatte Funktion $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ existiert, welche auf A mit f übereinstimmt und deren Träger in U liegt.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für jede lokal endliche Familie $\mathcal{X}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes M gilt: $\{\overline{X} \mid X \in \mathcal{X}\}$ ist auch lokal endlich und

$$\overline{\cup_{X \in \mathcal{X}} X} = \cup_{X \in \mathcal{X}} \overline{X}.$$

(ii) Zeige, dass obige Aussage im Allgemeinen nicht mehr richtig ist, wenn A nicht abgeschlossen ist.