Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 5

1. Seien M, N und V glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$, $G : N \to V$ glatt und $p \in M$.

(i) Zeige, dass die *Ableitung* von F an p, definiert durch

$$\mathrm{d}F_p : T_pM \to T_{F(p)}N,\ \mathrm{d}F_p(\omega)(f) := \omega(f \circ F)\ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

wohldefiniert ist.

(ii) Beweise folgende funktorielle Eigenschaften:

(a) $\mathrm{d}F_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ ist linear.
(b) $\mathrm{d}(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$.
(c) $\mathrm{d}(G \circ F)_p = (\mathrm{d}G)_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p : T_pM \to T_{G(F(p))}V$.
(d) Ist F ein Diffeomorphismus, so ist $\mathrm{d}F_p$ ein Isomorphismus mit $(\mathrm{d}F)_p^{-1} = \mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)}$.

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Es sei $\mathcal{K}_p$ die Menge aller glatten Abbildungen $\gamma : I \to M$, wobei I ein offenes Intervall ist, 0 in I liegt und $\gamma(0) = p$ gilt.
Zwei solcher Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_p$ heißen *äquivalent*, falls gilt: $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für alle glatten reellwertigen Funktionen f, welche auf einer Umgebung von p definiert sind.

(i) Zeige: Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Zeige: Für $\gamma \in \mathcal{K}_p$ ist $\gamma'(0)$ eine Differentiation in p, also $\gamma'(0) \in T_pM$, wobei wir definieren:

$$\gamma'(0)(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

(iii) Sei $\mathcal{V}_pM$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{K}_p$. Zeige, dass $\Psi : \mathcal{V}_pM \to T_pM$, definiert durch $\Psi[\gamma] := \gamma'(0)$ wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten) und injektiv ist.

Achtung: Am 24. November findet keine Übung statt und die Vorlesung am 28. November entfällt ebenfalls.