Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 11

1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subset M$ eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist $\iota : S \to M$ eine glatte Immersion, und $d\iota_p : T_pS \to T_pM$ ist injektiv. Also können wir T_pS als Unterraum von T_pM auffassen, wobei für $v \in T_pS$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

$$v(f) := d\iota_p(v)f = v(f \circ \iota) = v(f|_S).$$

(i) Zeige: Ein Vektor $v \in T_pM$ ist in T_pS genau dann, wenn eine glatte Kurve $\gamma : I \to M$ existiert mit $\gamma(I) \subset S$, $\gamma : I \to S$ ist glatt, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

(ii) Es sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre. Zeige: $\mathbb{S}^2$ ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und bestimme $T_p\mathbb{S}^2$ am Punkt $(1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$.

2. Verifiziere den Satz von Sard am Beispiel $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^3$.

3. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit $\dim S < \dim M$. Zeige, dass S Maß 0 in M besitzt.