UNIVERSITÄT ULM
Besprechung:
09.02.15, 13 Uhr
E18, HeHo22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 13

Im Folgenden sei $\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x^n \geq 0\}$.

1. Mache dich mit folgenden Definitionen vertraut:
Eine n**-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand** ist ein topologischer Hausdorffraum M, welcher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und für den für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p und ein Homöomorphismus Φ von U auf eine (relativ) offene Menge in $\mathbb{H}^n$ existiert.

M heißt **glatt**, falls ein glatter Atlas für M existiert. Dabei heißt für $V \subset \mathbb{H}^n$ (relativ) offen eine Funktion $F : V \to \mathbb{R}^k$ glatt, falls sie lokal glatt fortgesetzt werden kann, also für alle $v \in V$ eine Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ von v existiert, so dass F auf $\tilde{V}$ glatt fortgesetzt werden kann.

Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit. $M \subset N$ heißt **glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand**, falls $M \subset N$ mit der induzierten Struktur eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, so dass $\iota : M \hookrightarrow N$ eine glatte Einbettung ist.

2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ reguläre Werte von f. Zeige:

(i) $f^{-1}((-\infty, b])$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von M mit Rand von der selben Dimension wie M.

(ii) $f^{-1}([a, b])$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von M mit Rand von der selben Dimension wie M.

3. Zeige, dass folgenden Mengen glatte Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind:

(i) $\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, ||x|| \leq 1\}$.

(ii) $\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, ||x|| = 1, x^n \geq 0\}$.