



Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 02

1. Es sei $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ eine Ebene, welche die Inzidenzaxiome und die Axiome der Lage erfüllt. (4)
Zeige:

- (i) $(A, B, C) \in \mathcal{Z}, (B, C, D) \in \mathcal{Z} \Rightarrow (A, B, D) \in \mathcal{Z}, (A, C, D) \in \mathcal{Z}.$
(ii) $(A, B, D) \in \mathcal{Z}, (B, C, D) \in \mathcal{Z} \Rightarrow (A, B, C) \in \mathcal{Z}.$

2. Es sei $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ eine Ebene, welche die Inzidenzaxiome und die Axiome der Lage erfüllt. (3)
Sei eine Gerade $g \subset E$ und vier paarweise verschiedene Punkte auf g gegeben. Zeige, dass sich diese Punkte so mit A, B, C, D bezeichnen lassen, dass gilt:

$$(A, B, C) \in \mathcal{Z}, (B, C, D) \in \mathcal{Z}.$$

3. Es sei $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ eine Ebene, welche die Inzidenzaxiome und die Axiome der Lage erfüllt. Außerdem seien die Kongruenzaxiome (K1), (K2) und (K3) erfüllt.

- (i) Zeige, dass $<$ aus Definition 1.16 wohldefiniert ist, das heißt unabhängig von der Wahl des speziellen Repräsentanten der Äquivalenzklasse, also: (6)
Für alle $P, Q, P', Q', U, V, U', V' \in E$ mit $\overline{PQ} = \overline{UV}$ und $\overline{P'Q'} = \overline{U'V'}$ gilt:

$$\overline{PQ} < \overline{P'Q'} \Leftrightarrow \overline{UV} < \overline{U'V'}.$$

Hinweis: Unterscheide zunächst die Fälle $P = Q$ und $P \neq Q$. Im zweiten Fall konstruiere ein $R \in S(U', V')$ mit $\overline{U'R} = \overline{PQ}$. Betrachte dann die vier möglichen Fälle, wie R auf $S(U', V')$ liegen kann.

- (ii) Zeige die Trichotomie, das heißt für $P, Q, P', Q' \in E$ ist genau einer der folgenden Fälle erfüllt: (4)
(a) $\overline{PQ} < \overline{P'Q'}$
(b) $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$
(c) $\overline{PQ} > \overline{P'Q'}$.
- (iii) Zeige, dass für $P, Q, R, T, U, V \in E$ gilt: Ist $\overline{PQ} < \overline{RT}$ und $\overline{RT} < \overline{UV}$, so folgt $\overline{PQ} < \overline{UV}$. (3)

Achtung: Die Übung findet ausnahmsweise am Dienstag, den 5. Mai um 8 Uhr im H14 anstelle der Vorlesung statt, die Vorlesung ist stattdessen am Montag um 16 Uhr im H14.