Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
23.06.15, 08:30 Uhr
H14

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

20 Punkte

Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 08

1. Wir erweitern die Definition des Doppelverhältnisses auf $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ wie folgt: Für $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$ sei

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}, & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, \\ \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}, & z_1, z_2, z_3 \neq \infty, z_4 = \infty, \\ \frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}, & z_1, z_2, z_4 \neq \infty, z_3 = \infty, \\ \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}, & z_1, z_3, z_4 \neq \infty, z_2 = \infty, \\ \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}, & z_2, z_3, z_4 \neq \infty, z_1 = \infty, \\ 1, & z_1 = z_2 = \infty \text{ oder } z_3 = z_4 = \infty. \end{cases}$$

Es seien z_1, z_2, z_3, z_4 aus $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ mit $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$ und $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Dann ist (5)

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(\varphi_A(z_1), \varphi_A(z_2), \varphi_A(z_3), \varphi_A(z_4)).$$

Hinweis: Es darf folgendes Resultat der Linearen Algebra verwendet werden: Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist ein Produkt von Matrizen der Form

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$, $b \neq 0, c \neq 0$.

2. Es seien $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ paarweise verschieden. Zeige, dass $\varphi = \mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4)$ die eindeutige gebrochen lineare Transformation $\varphi\colon \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist mit (7)

$$\varphi(z_2) = 1, \; \varphi(z_3) = 0, \; \varphi(z_4) = \infty.$$

Folgere, dass für $z, z' \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{DV}(z, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(z', z_2, z_3, z_4)$ genau dann, wenn $z = z'$ ist.

3. Es sei $a > b > 0$ und $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ eine Ellipse. Es sei weiter $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \frac{a^2}{c}\right\}$, wobei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist. Zeige, dass dann für den Brennpunkt $P = (c, 0)$ gilt: (3)

$$E = \left\{Z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{|Z - P|}{\mathrm{d}(Z, L)} = \frac{c}{a} = e\right\}.$$

4. Sei $c > 0$, $P = (c, 0) \in \mathbb{R}^2$, $Q = -P$, $0 < a < c$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Zeige, dass die Hyperbel (5)

$$H = \left\{Z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \big||Z - P| - |Z - Q|\big| = 2a\right\}$$

beschrieben wird durch

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$