Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 09

1. Es sei $a > b > 0$ und $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ eine Ellipse. Sei ferner $R = (x_0, y_0) \in E$ ein fester Punkt.

(i) Zeige, dass die Tangente T durch R die Gleichung (2)

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1\right\}$$

in Koordinatenform erfüllt.

(ii) Es sei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ und $P = (c, 0)$ sowie $Q = -P$. Zeige, dass gilt: (3)

$$\mathrm{d}(P,T) = \frac{b}{b'}(a - ex_0), \quad \mathrm{d}(Q,T) = \frac{b}{b'}(a + ex_0),$$

wobei $b' = \sqrt{\frac{x_0^2 b^2}{a^2} + \frac{y_0^2 a^2}{b^2}}$ ist.

(iii) Zeige $|P - R| = a - ex_0$ und $|Q - R| = a + ex_0$. (3)

(iv) Es bezeichne U (bzw. V) den Lotfußpunkt von P (bzw. Q) auf T. Zeige, dass die beiden Dreiecke $\triangle(P,U,R)$ und $\triangle(Q,V,R)$ ähnlich sind. (2)
Hinweis: Zwei Dreiecke heißen zueinander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkeln übereinstimmen. Dies ist nach einem Ähnlichkeitssatz bereits der Fall, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite bereinstimmen.

(v) Erkläre die Bezeichnung ‚Brennpunkte' für P und Q. (1)

2. Es sei $c > 0$ und $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = 4cx\}$ eine Parabel. Zeige folgende Reflexionseigenschaft der Parabel: Alle aus dem Brennpunkt kommende Strahlen sind nach Reflexion aus der Parabel parallel. (4)
Bemerkung: Reflexion eines Strahls an einem Punkt p aus C bedeutet nach dem Reflexionsgesetz die Spiegelung der Geraden an der Tangente durch p.

3. Betrachte die Abbildung

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (t, t\sin\frac{1}{t}), & t > 0, \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}$$

(i) Zeige, dass γ ein Weg ist. (1)

(ii) Zeige, dass γ nicht rektifizierbar ist. (2)
Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Es sei die logarithmische Spirale (2)

$$\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$$

gegeben. Bestimme die Parametrisierung von γ nach Bogenlänge.