



Übungen zur Vorlesung Geometrie

1. Bestimme die Länge einer Periode der Zykloide, also die Länge des Wegs (4)

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende zur Bestimmung des Integrals das Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ mit den speziellen Werten $x = y = \frac{t}{2}$.

2. Zeige Lemma 5.16, also dass die C^q -Äquivalenz sowie die orientierungserhaltene C^q -Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller C^q -Wege beschreibt. (3)

3. Es sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^2 -Weg. Zeige, dass γ genau dann ein Geradenstück ist, wenn $k(t) = 0$ ist für alle $t \in I$. (3)

4. In dieser Aufgabe zeigen wir Satz 5.31: Es sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^2 -Weg, nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisiert. Es sei $A(t) = (\gamma'(t), \gamma''(t))$ die Matrix, deren Spalten aus der ersten und zweiten Ableitung von γ bestehen. Zeige folgende Formel für die Krümmung: (6)

$$k(t) = \frac{\det A(t)}{|\gamma'(t)|^3} \text{ für alle } t \in I.$$

Hinweis: Betrachte die Umparametrisierung von γ nach Bogenlänge, also $\sigma = \gamma \circ \psi$, wobei $\psi = \varphi^{-1}$ die Umkehrfunktion von $\varphi: I \rightarrow \varphi(I) \subset \mathbb{R}, t \mapsto \int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds$ ist. Bestimme dann k mit Hilfe von Satz 5.25.

5. Es sei $a \in \mathbb{R}^2$ und $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Sei weiter $f = T_A \circ R_\vartheta$, wobei R_ϑ der Drehung um den Nullpunkt um den Winkel ϑ gegen den Uhrzeigersinn entspricht.

Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^2 -Weg, nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisiert. Definiere $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$. Zeige:

- (i) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, dann ist es auch $\tilde{\gamma}$. (1)

- (ii) Es sei k die Krümmung von γ und \tilde{k} die Krümmung von $\tilde{\gamma}$. Zeige, dass gilt: (3)

$$k(t) = \tilde{k}(t) \text{ für alle } t \in I.$$