UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

Besprechung:
10.06.15, 12 Uhr
He18 E60

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Geometrie Blatt I

1. Wir betrachten die offene Teilmenge $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \le 0\}$ mit den Standardkoordinaten $\Phi : M \to M, (x,y) \mapsto (x,y)$.

(i) Zeige, dass $\Psi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to M$, $(r,\vartheta) \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ eine mit (M,Φ) verträgliche Karte bildet.

Sei $\hat{p} = (r,\vartheta) = (2,\frac{\pi}{2}) \in M$, $v := 3\, \frac{\partial}{\partial r}\big|_p - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\big|_p \in T_pM$.

(ii) Bestimme $v(f)$, wobei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\hat{f}(r,\vartheta) = r\frac{e^{r^2}\cos\vartheta}{2}.$$

(iii) Entwickle v in der Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \right\}$.

(iv) Bestimme $v(g)$, wobei $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in Standardkoordinaten definiert ist durch

$$\hat{g}(x,y) = \frac{1}{2} x e^{y^2+x^2}.$$

2. Es seinen M^m und N^n zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Finde eine differenzierbare Struktur auf $M \times N$, so dass $M \times N$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $m+n$ wird, und die Projektionen $\pi_M : M \times N \to M$ und $\pi_N : M \times N \to N$ glatte Abbildungen sind.

3. Es sei $\mathbb{RP}^n := \{V \subset \mathbb{R}^{n+1} | V \text{ ist ein eindimensionaler Unterraum}\}$.

(i) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$x \sim y :\iff \exists\, \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Zeige: Dies ist eine Äquivalenzrelation und es gilt ${}^{(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})}/_{\sim} = \mathbb{RP}^n$.

(ii) Für ein Element $[x] \in \mathbb{RP}^n$ schreiben wir $[(x_1,\ldots,x_{n+1})] =: [x_1 : \ldots : x_{n+1}]$. Ferner definieren wir $U_1,\ldots,U_{n+1} \subset \mathbb{RP}^n$ durch

$$U_i := \{[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \,|\, x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i), [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1}).$$

Zeige, dass φ_i wohldefiniert und bijektiv ist.

(iii) Zeige, dass die Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ glatte Diffeomorphismen sind und folgere, dass $\mathbb{RP}^n$ eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.