Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Geometrie

Blatt II

1. Zwei Karten $(U,\varphi), (V,\psi)$ einer glatten Mannigfaltigkeit M heißen **orientierbar verträglich**, falls für alle $p \in U \cap V$ gilt: die Ableitung des Differentials des Kartenwechsels $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ am Punkt $\varphi(p)$ ist positiv, d.h.

$$\det \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} > 0.$$

Die Mannigfaltigkeit M heißt **orientierbar**, falls es einen Atlas gibt, dessen Karten alle orientierbar verträglich sind.

(i) Finde eine Mannigfaltigkeit M und drei Karten auf M, so dass zwei davon orientierbar verträglich sind, zwei andere jedoch nicht.

(ii) Zeige, dass das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit stets orientierbar ist.

2. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F \colon M \to N$ glatt, $p \in M$, (U,φ) eine Karte in p für M und (V,ψ) eine Karte in $F(p)$ für N. Zeige, dass für alle i gilt:

$$\mathrm{d}F_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)},$$

wobei $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ und $\hat{p} = \varphi(p)$ sind.

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Es sei $\mathcal{K}_p$ die Menge aller glatten Abbildungen $\gamma : I \to M$, wobei I ein offenes Intervall ist, 0 in I liegt und $\gamma(0) = p$ gilt.
Zwei solcher Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_p$ heißen *äquivalent*, falls gilt: $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für alle glatten reellwertigen Funktionen f, welche auf einer Umgebung von p definiert sind.

(i) Zeige: Für $\gamma \in \mathcal{K}_p$ ist $\gamma'(0)$ eine Differentiation in p, also $\gamma'(0) \in T_pM$, wobei wir definieren:

$$\gamma'(0)(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \mathrm{d}\gamma_0\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0\right)(f)\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

(ii) Sei $\mathcal{G}_pM$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{K}_p$. Zeige, dass $\Psi \colon \mathcal{G}_pM \to T_pM$, definiert durch $\Psi[\gamma] := \gamma'(0)$ wohldefiniert und bijektiv ist.

4. Es sei $F \colon M \to N$ eine Immersion einer glatten Mannigfaltigkeit M^m in eine glatte Mannigfaltigkeit N^n. Zeige, dass F lokal eine Einbettung ist, also dass für jedes $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von p existiert, so dass $F|_U : U \to N$ eine Einbettung ist.

— bitte wenden —

Eine Teilmenge $S \subset M$ einer Mannigfaltigkeit M heißt **Untermannigfaltigkeit**, falls S das Bild einer Einbettung $F\colon N \to F(N) = S \subset M$ ist.
Mit Hilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen lässt sich zeigen, dass jede reguläre Niveaumenge einer glatten Funktion eine Untermannigfaltigkeit ist, deren Kodimension der Dimension des Bildes der Funktion entspricht. Dabei heißt eine Niveaumenge $F^{-1}(\{q\})$ regulär, falls $dF_p\colon T_pN \to T_qM$ surjektiv ist für alle $p \in F^{-1}(\{q\})$.

5. Überprüfe, ob folgende Teilmengen Untermannigfaltigkeiten sind.

(i) $S = \{(t^3, -t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-1,1)\}$.

(ii) $S = \{(\sin(2t), \sin(t)) \mid t \in (-\pi, \pi)\}$.

(iii) $S_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + xy + y^3 = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$.

6. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion.

(i) Zeige, dass der Graph

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

von F eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

(ii) Berechne die Riemannsche Metrik auf U bezüglich den Standardkoordinaten, welche sich durch Zurückziehen der Standardmetrik im $\mathbb{R}^{n+k}$ durch die Immersion

$$F\colon U \to \mathbb{R}^{n+k},\ x \mapsto (x, f(x))$$

ergibt.