Übungen zur Vorlesung Riemannsche Geometrie

Blatt IV

1. Es sei $\gamma = (\alpha, \beta) \colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve mit $\alpha(r) > 0$ für alle $r \in (0,1)$, so dass γ' nirgends verschwindet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, also $||\gamma'(r)||_{\text{euc}} = 1$ für alle r.
Es sei $M := (0,1) \times \mathbb{R}$ und F die Immersion

$$F \colon (0,1) \times \mathbb{R},\ (r, \vartheta) \mapsto (\alpha(r)\cos(\vartheta), \alpha(r)\sin(\vartheta), \beta(r))$$

von M in den $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimme die von F durch Zurückziehen induzierte Metrik auf M.

(ii) Zeige, dass die Christoffelsymbole auf M gegeben sind durch

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,\ \ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'}{\alpha},\ \ \Gamma_{22}^1 = -\alpha'\alpha.$$

(iii) Zeige, dass jeder 'Meridian' $\{\vartheta = \text{const}\}$ das Bild einer Geodäte ist.
Hinweis: Geodäten sind immer mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert.

(iv) Finde notwendige und hinreichende Kriterien dafür, dass ein 'Breitenkreis' $\{r = \text{const}\}$ das Bild einer Geodäte ist.

(v) Wende diese Resultate auf die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ an.

(vi) Zeige, dass man auf einem Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ zwei Punkte mit unterschiedlichen z-Koordinaten durch unendlich viele verschiedene Geodäten verbinden kann.

2. Es sei $M = \mathbb{S}^n$ mit der von der Inklusion $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik. Für $p \in \mathbb{S}^n$ und $0 \neq v \in T_p\mathbb{S}^n = \{p\}^\perp$ setze

$$c_{p,v}(t) = \cos(t\,|v|)p + \sin(t\,|v|)\frac{v}{|v|}.$$

(i) Zeige, dass $c_{p,v}$ eine Geodäte ist.
Hinweis: Verwende Aufgabe 6 vom dritten Blatt.

(ii) Was ist die größte Umgebung $V(p) \subset T_p\mathbb{S}^n$ von 0, so dass

$$\exp_p \colon V(p) \to \exp_p(V(p)) \subset \mathbb{S}^n$$

ein Diffeomorphismus ist?

— bitte wenden —

3. Es sei $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der Metrik

$$g_{(x,y)} = \frac{1}{y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf dem letzten Blatt haben wir die Christoffelsymbole

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y} = -\Gamma^2_{11}, \;\; \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0$$

bestimmt.

(i) Zeige, dass die y-Achse sowie Halbkreise mit Mittelpunkt $(0,0)$ Geodäten sind.
Hinweis: Parametrisiere den Halbkreis durch $(x(t), y(t)) = r(-\tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)})$.

(ii) Verwende die Isometrie $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, (x,y) \mapsto (x+c, y)$, um zu zeigen, dass alle Geodäten bereits von dieser Form sind, also parallel zur y-Achse oder Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse.

(iii) Zeige, dass es zu jeder Geodäte und zu jedem Punkt, der nicht auf der Geodäte liegt, unendlich viele Geodäten durch diesen Punkt gibt, welche sich nicht mit der ersten Geodäte schneiden.
Bemerkung: Dies ist **das** Beispiel für die Unabhängigkeit des Parallelenpostulat von den anderen euklidischen Axiomen.

(iv) Bestimme die Koordinaten R^m_{ijk} des Riemannschen Krümmungstensors R.

(v*) Bestimme die Gaußkrümmung von $\mathbb{H}^2$.

4. Es sei $\gamma = (\alpha, \beta) \colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ wie in der ersten Aufgabe eine glatte Kurve mit $\alpha(r) > 0$ für alle $r \in (0,1)$, so dass γ' nirgends verschwindet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, also $||\gamma'(r)||_{\text{euc}} = 1$ für alle r.
Es sei $M := (0,1) \times \mathbb{R}$ und F die Immersion

$$F \colon (0,1) \times \mathbb{R}, \; (r, \vartheta) \mapsto (\alpha(r)\cos(\vartheta), \alpha(r)\sin(\vartheta), \beta(r))$$

von M in den $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimme die Gaußkrümmung von $F(M)$ auf zwei Arten: Einmal als $K(r,\vartheta) = \frac{\det \mathrm{d}\nu_{(r,\vartheta)}}{\det g_{(r,\vartheta)}}$, wobei $\nu \colon F(M) \to \mathbb{S}^2$ ein Normalenvektorfeld ist, und dann als Determinante der Matrix (w^i_j).

(ii) Bestimme die Gaußkrümmung des Zylinders und der Sphäre.