Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 03

9. Es sei $\gamma\colon [0,1] \to (0,\infty)$ eine glatte Kurve und $X\colon T := \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(\varphi, t) := (\gamma(t)\cos\varphi, \gamma(t)\sin\varphi, t).$$

(i) Zeige, dass X eine Immersion ist. (2)

(ii) Gib eine größtmögliche offene Umgebung T_0 von $(0, \frac{1}{2}) \in T$ an, so dass $X_{|T_0}$ eine Einbettung ist. (1)

(iii) Bestimme für jedes $(\varphi, t) \in T$ eine Basis des Tangentialraumes und des Normalenraumes am Punkt $X(\varphi, t)$. (2)

(iv) Bestimme die Gramsche Matrix $G(\varphi, t)$ und die Gramsche Determinante $g(\varphi, t)$ für $(\varphi, t) \in T$. (2)

10. Verifiziere Satz 2.13 über den Parameterwechsel am Beispiel der Sphäre mit den beiden Karten (3)

$$X_1 := P_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, y \mapsto \frac{2}{|y|^2+1}\left(y, \frac{|y|^2-1}{2}\right),$$

$$X_2 := P_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{S\}, y \mapsto \frac{2}{|y|^2+1}\left(y, \frac{1-|y|^2}{2}\right).$$

11. Zeige Satz 2.18, also: Ist M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$ und $f = (f_1, \ldots, f_{n-d})$ (5) $U \to \mathbb{R}^{n-d}$ wie in Definition 2.1, so gilt für den Tangentialraum T_aM von M an a:

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle v, Df_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n-d\}.$$

12. Es sei M eine Hyperfläche, also $d = n-1$, welche lokal als Graph dargestellt sei, d.h. für ein $a \in M$ sei $U = U' \times U''$ eine offene Umgebung von $a = (a', a_n)$ mit $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}, U'' \subset \mathbb{R}$ offen, so dass gilt:

$$M \cap U = \{(x', x_n) \in U \,\big|\, x_n = g(x')\}$$

für ein $g \in \mathcal{C}^1(U', U'')$.

(i) Bestimme die Einheitsnormalenvektoren an M in a bezüglich der Funktion g. (2)

(ii) Bestimme die Gramsche Matrix und Gramsche Determinante am Punkt a. (3)
Hinweis: Verwende den Satz von Cauchy-Binet aus der Linearen Algebra.

13. Es seien $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$. Zeige, dass äquivalent sind: (5*)

(i) $\langle \nu, a_i\rangle = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

(ii) ν ist Extremum der Funktion $F\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, x \mapsto \det(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$.