Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
08.12.15, 16 Uhr
H12

F. Stoffers
A. Spener
WS 15/16

20+3* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 04

14. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig in x und stetig differenzierbar in y. Seien außerdem $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeige, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: (3*)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\,\mathrm{d}x + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(y, z, t) \mapsto \int_t^z f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

15. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $0 < a < b$ und $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^2 < |x|_2^2 < b^2\}$. Zeige (4)

$$\int_G \frac{n-1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}(b)\right) - \mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}(a)\right)$$

wobei $\mathbb{S}^{n-1}(c)$ die Oberfläche der euklidischen Kugel mit Radius c im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
Hinweis: Wende den Satz von Gauß auf das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ an.

16. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 2x_3)$. Bestimme das Integral

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle f(x), x\rangle\,\mathrm{d}S_x$$

auf zwei Arten:

(i) Durch Wahl einer Parametrisierung der Sphäre. (4)
Hinweis: 'Nullmengen' dürfen ignoriert werden.

(ii) Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes. (3)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der (klassische) **Laplace-Operator** Δ ist definiert als die Abbildung

$$\Delta : \mathcal{C}^2(G, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(G, \mathbb{R}),\; f \mapsto \Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

— bitte wenden —

17. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\mathcal{C}^1$-Rand und äußerer Einheitsnormalen $\nu : \partial G \to \mathbb{S}^{n-1}$.

(i) Zeige für $f, g \in \mathcal{C}^1(\bar{G}, \mathbb{R})$ die Gleichung (1)

$$\int_G f \nabla g \, \mathrm{d}x = \int_{\partial G} f g \, \nu \, \mathrm{d}S - \int_G g \, \nabla f \, \mathrm{d}x,$$

also komponentenweise für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\int_G f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial G} f(x) g(x) \nu_i(x) \, \mathrm{d}S_x - \int_G g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, \mathrm{d}x.$$

(ii) Zeige für $f \in \mathcal{C}^1(\bar{G}, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^2(\bar{G}, \mathbb{R})$ die erste Greensche Identität (2)

$$\int_G f(x) \Delta g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial G} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) \, \mathrm{d}S_x - \int_G \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle \, \mathrm{d}x,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial v}$ die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors v bezeichnet.

18. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\mathcal{C}^1$-Rand und äußerer Einheitsnormalen $\nu : \partial G \to \mathbb{S}^{n-1}$.

(i) **Eigenwerte des Laplace-Operators**
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{G}, \mathbb{R})$, $u \not\equiv 0$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (3)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } G, \\ u \equiv 0 & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Zeige, dass dann $\lambda > 0$ gilt.
Hinweis: Betrachte $\lambda \int_G u^2 \, \mathrm{d}x$ und verwende Aufgabe 17.(ii).

(ii) Zeige oder widerlege, dass auch für eine Lösung $u \not\equiv 0 \in \mathcal{C}^2(\bar{G}, \mathbb{R})$ des Problems (1)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } G, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

$\lambda > 0$ gelten muss.

(iii) Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ und $g : \partial G \to \mathbb{R}$. Zeige: Falls eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\bar{G}, \mathbb{R})$ existiert, welche eine Lösung von (2)

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } G, \\ u = g & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

ist, so ist u schon eindeutig bestimmt.