Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
26.01.16, 16 Uhr
H12

Dr. F. Stoffers
A. Spener
WS 15/16

$20 + 3^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 07

28. Es sei f die 2π-periodische Fortsetzung von $x \mapsto |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

(i) Zeige: Die Fourierkoeffizienten von f sind gegeben durch (2)

$$c_0(f) = \frac{\pi}{2} \text{ und } c_n(f) = \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n^2}, n \neq 0.$$

(ii) Setze $x = 0$ um zu zeigen, dass gilt: (3)

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Löse das **Basler Problem:** (1)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

29. (i) Es sei $\beta \in (0, 1]$ und $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x^\beta$. Überprüfe, ob f Hölderstetig auf $[0, 1]$ ist. Existiert ein größter Exponent $\alpha \in (0, 1]$, so dass f Hölderstetig mit Exponent α ist? (3)

(ii) Charakterisiere die Menge der Funktionen auf $\mathbb{R}$, die eine Hölderbedingung mit Exponenten $\alpha > 1$ erfüllen. (1^*)

30. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum H und $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(i) Zeige die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (2^*)

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y|| \text{ für alle } x, y \in H.$$

(ii) Folgere die Dreiecksungleichung (2)

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \text{ für alle } x, y \in H.$$

31. Es sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(I)$ eine Orthonormalfolge und α_n, $\beta_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n$ konvergiert in $L^2(I)$ genau dann, wenn die reelle Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ konvergiert. (6)

Hinweis: Verwende für die Hinrichtung, dass in L^2 konvergente Folgen beschränkt sind. Für die Rückrichtung reicht es wegen der Vollständigkeit von L^2 die Cauchy-Eigenschaft zu überprüfen.

(ii) Konvergieren die Reihen $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n =: f$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n u_n =: g$ in $L^2(I)$, so gilt: (3)

$$\langle f, g \rangle_{L^2(I)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

Insbesondere ist also $||f||_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ und $\alpha_n = \langle f, u_n \rangle_{L^2}$.