Skript zur Vorlesung

Elemente der Variationsrechnung

Anna Dall'Acqua
Universität Ulm

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[B] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDEs.* Universitext, Springer Verlag.

[BGH] Giuseppe Buttazzo, Mariano Giaquinta, and Stefan Hildebrandt. *One dimensional variational problems.* Volume 15 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[DA1] Bernard Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations.* Volume 78 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[DA2] Bernard Dacorogna. *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, London, 2004.

[E] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 19. American Mathematical Society.

[GH1] Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt. *Calculus of variations. I.* Volume 310 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Gi] Enrico Giusti. Direct Methods in the Calculus of Variation. World Scientific.

[Hi2] Stephan Hildebrandt. *Analysis 2.* Springer-Verlag.

[R] Walter Rudin, Real and Complex Analysis. McGraw-Hill international editors.

Kapitel 1

Einführung

Gegeben sei ein Funktional

$$\begin{aligned} &J : X \longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ &J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\,dx\,, \end{aligned}$$

wobei

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$;

2. X ist eine Menge von ‘passenden’ Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Normalerweise ist X ein Banachraum (d.h. ein normierter vollständiger Vektorraum) oder ein Unterraum eines Banachraums oder eine Teilmenge eines Banachraums;

3. $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine genügend glatte Funktion.

Beispiel: Betrachte

$$\begin{aligned} &X = \{u \in C^1([0,1]) :\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0\}\,, \\ &J : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx\,. \end{aligned}$$

Ziel der Variationsrechnung: Finde $\overline{u} \in X$, so dass J in $\overline{u}$ einen stationären Punkt hat. D.h. J hat in $\overline{u}$ entweder ein Minimum oder ein Maximum oder einen Sattelpunkt.

Meistens wird folgendes Problem betrachtet:

$$\text{Finde } \overline{u} \in X, \text{ so dass } J(\overline{u}) \leq J(u) \text{ für alle } u \in X\,. \tag{P}$$

In dieser Vorlesung werden wir uns auf Problem (P) konzentrieren, d.h. wir untersuchen, wann es ein Minimum gibt. Mit ähnlichen Methoden kann man dann direkt auch Funktionale auf Maxima untersuchen, da ein lokales Maximum für J ein lokales Minimum für $-J$ ist. Die Untersuchung von Sattelpunkten ist ein sehr interessantes Problem, das ganz andere Methoden benötigt.

Man könnte allgemeinere Funktionalen betrachten, etwas von der Typ

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), ..., D^k u(x))\, dx\,.$$

Wir werden uns konzentrieren auf den Fall $k = 1$. Viele Resultaten konnen direkt auf den Fall $k > 1$ verallgemeinert werden.

Wieso interessiert man sich für solche Fragenstellungen? Viele Probleme aus der Analysis, Geometrie, Physik sowie Angewandten Mathematik lassen sich wie in Problem (P) formulieren. Wir wollen dann wissen, ob es ein Minimum gibt! Ist das dann eindeutig? Regulär? Im Allgemeinen wird man keine explizite Formel bekommen. Es wird sich zeigen, dass die Wahl des Definitionsbereichs des Funktionals sehr wichtig ist, d.h. die Wahl der Menge X. Bei einer zu kleinen Menge wird man kein Minimum finden. Bei einer zu großen Menge wird man vielleicht ein Minimum finden, aber es ist dann nicht klar welche Relation zwischen diesem Minimum und der Lösung, die wir in der Natur sehen, besteht. Man versucht dann zusätzliche qualitative Eigenschaften der Minimierer zu zeigen.

Diese Aspekte werden wir in der Vorlesung ansprechen.

Es gibt zwei verschiedene Herangehensweisen: einerseits die Klassische Variationsrechnung, anderseits die Direkten Methoden.

1.1 Klassische Variationsrechnung

Diese Herangehensweise ist motiviert durch das Studium kritischer Punkte von Funktionen. Sei $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Gesucht wird

$$\inf\{g(x) : x \in \Omega\}\,.$$

Dann betrachte man die Menge der Punkte $x \in \Omega$ so dass $Dg(x) = 0$ und das Verhalten von D^2g in diesen Punkten und ggfs. das Verhalten von g auf $\partial\Omega$. In der Klassischen Variationsrechnung macht man dasselbe für Funktionale.

$$\begin{array}{c}\text{Funktional}\\ \downarrow\\ \text{(Partielle) Differentialgleichung}\\ \downarrow\\ \text{Finde Lösungen}\\ \downarrow\\ \text{Minimum}\end{array}$$

Der erste Schritt entspricht 'Setze die Ableitung gleich Null'. Der zweite Schritt entspricht 'Finde die Nullstellen der Ableitung'. Letzter Schritt: 'Untersuche, falls eine der Nullstellen ein Minumum ist'.

Mit den Klassischen Methoden werden wir uns im ersten Teil des Semesters beschäftigen.

1.2 Direkte Methoden

Hier arbeitet man direkt mit der Minimum-Eigenschaft in folgendem Sinne:

$$\begin{array}{c}\text{Funktional}\\ \downarrow\\ \text{Betrachte eine } \textbf{Minimalfolge},\\ \text{d.h. } u_n \in X \text{ mit } \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in X} J(v).\\ \downarrow\\ \text{Zeige, dass } u \in X \text{ existiert}\\ \text{so dass } u_n \text{ gegen } u \text{ konvergiert in geeignetem Sinne.}\\ \downarrow\\ \text{Zeige Unterhalbstetigkeit des Funktional, d.h.}\\ J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)\,.\\ \downarrow\\ u \text{ ist das Minimum.}\end{array}$$

Diese Herangehensweise ist mehr Funktionalanalytisch geprägt und hat einige Entwicklungen in diesem Fach motiviert.

1.3 Klassische Probleme der Variationsrechnung

1.3.1 Die Brachystochrone

Das Wort kommt aus dem Griechischen und heisst ‘kürzeste Zeit’. 1696 stellte Johann Bernoulli folgendes Problem:

> Auf welcher der die Punkte A und B verbindenden Kurven gleitet ein Massepunkt unter Gravitationskraft und ohne Reibung am schnellsten von A nach B?

Das Problem würde dann gelöst von Jacob Bernoulli (seinem Bruder), Huygens, de L’Hospital, Leibniz und Newton.

Physikalische Herleitung des Modells

Seien $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ mit $x_2 > x_1$ und $y_1, y_2 > 0$. Wir parametrisieren die Kurve (die A und B verbindet) als $t \mapsto (x(t), y(t))^t$.

Die Energiegleichung ergibt, dass die Summe der potentiellen Energie und der kinetischen Energie gleich Null ist. Dann gilt punktweise

$$-mgy(t) + \frac{1}{2}m((v_1(t))^2 + (v_2(t))^2) = 0\,,$$

wobei m die Masse ist, g die Gravitationskonstante, und $\vec{v} = (v_1, v_2)^t$ ist die Geschwindigkeit. Aus diese Gleichung folgt die Relation

$$|\vec{v}(t)|^2 = 2gy(t)\,. \tag{1.1}$$

Wir machen nun die Annahme dass $x'(t) > 0$. Dann, mit Hilfe des Satzes der Inversen Funktion, konnen wir t als Funktion von x ausdrücken, d.h. $x \mapsto t(x)$ schreiben. Dann ist T (die Zeit von A nach B) gegeben durch

$$T = t(x_2) - t(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} t'(x)dx \text{ mit } t'(x) = \frac{1}{v_1(t(x))}\,,$$

da

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t))^t \text{ somit } x'(t) = v_1(t)\,.$$

Wir wollen nun $\frac{1}{v_1}$ als Funktion von x darstellen. Da der Parameter t als Funktion von x dargestellt werden kann, haben wir $y = y(t) = y(t(x)) =:$

$u(x)$, d.h. die Kurve kann parametrisiert werden als $x \mapsto (x, u(x))$ mit einer geeigneten Funktion u. Dann

$$v_2(t) = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} u(x) = v_1(t) u'(x)\,,$$

und

$$|\vec{v}(t(x))| = \sqrt{(v_1(t(x)))^2 + (v_2(t(x)))^2} = \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, v_1(t(x)) \quad (\text{da } v_1 > 0)\,.$$

Aus dieser Gleichung und (1.1) mit $y(t) = u(x)$ folgt

$$\frac{1}{v_1(t)} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}}\,.$$

Zusammenfassend ist die Zeit T von A nach B gegeben durch

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}} dx\,.$$

Problem. Seien $y_1, y_2 > 0$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Existiert das Minimum über $u \in C^1((x_1, x_2)) \cap C^0([x_1, x_2])$ mit $u > 0$, $u(x_1) = y_1$ und $u(x_2) = y_2$ des Funktionals

$$J(u) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}} dx\,?$$

1.3.2 Rotationssymmetrische Minimalflächen

Betrachte zwei Punkte $P_1 = (x_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, z_2)$ in der x, z-Ebene mit $x_1 < x_2$ und $z_1, z_2 > 0$. Sei $u : [x_1, x_2] \to (0, \infty)$ eine beliebige glatte Funktion mit $u(x_1) = z_1$ und $u(x_2) = z_2$. Die Drehung bzgl. der x-Achse des Graphen der Funktion u erzeugt eine Rotationsfläche S. Eine Parametrisierung für diese Fläche $S(u)$ ist gegeben durch

$$(x_1, x_2) \times \mathbb{R} \ni (x, \varphi) \mapsto (x, u(x)\cos(\varphi), u(x)\sin(\varphi))^t =: F(x, \varphi)\,.$$

Beachte, dass diese Parametrisierung nur <u>lokal</u> injektiv ist. Der Flächeninhalt von $S(u)$ ist

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx d\varphi = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx\,,$$

da

$$\begin{aligned} \partial_x F(x,\varphi) &= (1, u'(x)\cos(\varphi), u'(x)\sin(\varphi))^t \\ \partial_\varphi F(x,\varphi) &= (0, -u(x)\sin(\varphi), u(x)\cos(\varphi))^t \\ \text{und } \sqrt{\det(DF^t DF)} &= u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2} \end{aligned}$$

(siehe Skript Analysis 3).

Problem. Seien $z_1, z_2 > 0$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Existiert das Minimum über $u \in C^1((x_1,x_2)) \cap C^0([x_1,x_2])$ mit $u > 0$, $u(x_1) = z_1$ und $u(x_2) = z_2$ des Funktionals

$$J(u) := \int_{x_1}^{x_2} u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx\,?$$

1.3.3 Das Dirichlet-Integral

Man betrachte das Problem

$$D(u) = \int_I |u'(x)|^2\,dx \longrightarrow \text{min!}$$

auf $I = [a,b]$ und in der Klasse

$$X = \{u \in C^1(\overline{I}) :\ u(a) = \alpha \text{ und } u(b) = \beta\},$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Man wird sehen, dass für die Lösung dieses Problems es besser ist, den Definitionsbereich zu vergrößern: Wir werden mit Sobolev-Räumen arbeiten.