Elemente der Variationsrechnung (SoSe 2016): Fragen zur Vorbereitung auf die Prüfung

Die folgenden Fragen fassen die wichtigsten Themen und Schwerpunkte des Kurses zusammen und sollen richtungsweisend sein. Die Fragen sind nicht direkt als Prüfungsfragen zu verstehen, könnten aber in dieser oder ähnlicher Form in der Prüfung gestellt werden. Wo passend, sollte man diese Themen auch anhand konkreter gegebener Beispiele besprechen bzw. die entsprechenden Sätze anwenden können. Aufgaben wie aus den Übungen können ebenfalls gestellt werden.

(1) Wie sind die Fréchet-Ableitung und die erste Variation eines Funktionals definiert? Wie unterscheiden sie sich und wie hängen sie mit Extremstellen des Funktionals zusammen?

(2) Was sind Euler–Lagrange-Gleichungen und wie werden sie hergeleitet? Man veranschauliche dies auch anhand konkreter Beispiele.

(3) Unter welchen Bedingungen kann man einen Lagrange-Multiplikator für das Minimum eines Funktionals herleiten? Mit Beweisskizze und Anwendungen!

(4) Wie kann man im Allgemeinen die Existenz eines (globalen) Minimums zeigen? Wie hängt dies mit den Begriffen „Konvexität“ und „Koerzivität“ zusammen?

(5) Wann können wir erwarten, dass höchstens ein globaler Minimierer existiert?

(6) Was sind schwach differenzierbare Funktionen? Was sind Sobolevräume und welche Eigenschaften besitzen sie?

(7) Wie beweist man die Existenz von Minimierer(n) von Funktionalen der Gestalt

$$\int_I F(x, u(x), u'(x))\,dx,$$

welche Voraussetzungen an F sind nötig und warum?

(8) Warum betrachten wie solche Funktionale auf einem Sobolevraum und nicht etwa $C^1(\overline{I})$?

(9) Wie kann man zeigen (und unter welchen Voraussetzungen), dass eine C^1-Funktion sogar in C^2 liegt, falls sie Minimierer eines Funktionals ist?