# Kapitel 2

# Klassische Methoden

## 2.1 Funktionenräume und Differenzierbarkeit eines Funktionals

Wir präsentieren einige Funktionenräume, die im Rest der Vorlesung benutzt werden. Im Folgenden sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ein beschränktes Gebiet (offen und zusammenhängend).

**Räume stetig differenzierbarer Funktionen** Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, setzen wir

$$\begin{aligned} x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n\,, \\ D^\alpha &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\,, \\ \text{und } |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,. \end{aligned}$$

**Definition 2.1.1.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$. Der **Träger von** $f$ (Support auf Englisch) ist der Abschluss der Menge $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$.*
*In Zeichen:* $\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{x \in D : f(x) \neq 0\}}$.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A) &:= \{u : A \to \mathbb{R} :\ u \text{ stetig}\}\,, \\ \mathcal{C}^k(A) &:= \{u : A \to \mathbb{R} :\ D^\alpha u \in \mathcal{C}(A)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}\,, \\ \mathcal{C}_0^k(A) &:= \{u \in \mathcal{C}^k(A) :\ \operatorname{Supp}(u) \text{ kompakt und in } A \text{ enthalten}\}\,, \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^\infty(A) := \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{C}^k(A)\,.$$

Analog definiert man

$$\mathcal{C}(\overline{A}), \quad \mathcal{C}^k(\overline{A}) \qquad \text{und} \quad \mathcal{C}^\infty(\overline{A}),$$

wobei $u \in \mathcal{C}^k(\overline{A})$ bedeute, dass $u \in \mathcal{C}^k(A)$ (genauer: $u_{|A} \in \mathcal{C}^k(A)$), und $D^\alpha u$ stetig auf $\overline{A}$ fortsetzt werden kann für alle $|\alpha| \leq k$. Weiterhin sei

$$\mathcal{C}_0^k(\overline{A}) := \mathcal{C}_0^k(A) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_0^\infty(\overline{A}) := \mathcal{C}_0^\infty(A).$$

Diese Räume mit geeigneter Norm sind Banachräume, d.h. vollständig, oder in anderen Worten, jede Cauchy-Folge konvergiert.

**Satz 2.1.2.** *Es gilt:*

1. *Der Raum $\mathcal{C}(\overline{A})$ mit Norm*

$$\|u\|_{C^0} = \|u\|_\infty = \sup_{x\in\overline{A}} |u(x)|\,,$$

   *ist ein Banachraum.*

2. *Der Raum $\mathcal{C}^1(\overline{A})$ mit Norm*

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty\,,$$

   *ist ein Banachraum.*

3. *Der Raum $\mathcal{C}^k(\overline{A})$, $k \geq 2$, mit Norm*

$$\|u\|_{C^k} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^{k-1}(\overline{A})}\,,$$

   *ist ein Banachraum.*

*Beweis.* Teil 1. folgt direkt, da die Supremumsnorm die Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist und gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen stetig sind. Die anderen folgen analog und werden in der ersten Übung diskutiert. □

**Der Raum** $L^2(A)$ Wir betrachten folgenden Raum

$$L^2(A) := \{u : A \to \mathbb{R} : u \text{ messbar und } \int_A |u(x)|^2 \, dx < \infty\} \,,$$

wobei $u, v \in L^2(A)$ identifiziert werden falls $u = v$ fast überall in $A$. Somit ist folgender Ausdruck

$$||f||_2 := \left( \int_A |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \,,$$

eine Norm auf $L^2(A)$. Die Norm $|| \cdot ||_2$ ist durch ein Skalarprodukt gegeben:

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_A f(x)\overline{g(x)} \, dx \,.$$

Man hat

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}.$$

Wir geben einige Resultate (ohne Beweise) aus der Maßtheorie/ Funktionalanalysis.

**Lemma 2.1.3.** *([B, Thm. 4.6, 4.7] und [R, Thm. 3.8, 3.9]) Für $f, g \in L^2(A)$ gilt:*

*i.* $||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$ *(Minkowski - Ungleichung);*

*ii.* $\int_A |f(x)g(x)| \, dx \leq ||f||_2 ||g||_2$ *(Cauchy - Schwarz Ungleichung).*

**Satz 2.1.4.** *([B, Thm. 4.8] und [R, Thm. 3.11]) Der Raum $(L^2(A), || \cdot ||_2)$ ist ein Banachraum.*

**Satz 2.1.5.** *([B, Cor. 4.23] und [R, Thm. 3.14]) Sei $f \in L^2(A)$. Es gilt:*

$$\textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ existiert } g \in \mathcal{C}_0^\infty(A) \textit{ mit } \|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Analog definiert man $L^2(A; \mathbb{R}^m)$.

## 2.2 Die erste Variation

Nun wollen wir ein Funktional

$$J : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzieren, wobei $V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums $X$ ist.

### Differenzierbarkeit eines Funktionals

**Definition 2.2.1.** *Das Funktional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst* ***Fréchet-differenzierbar in*** *$u \in V$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $A : X \to \mathbb{R}$ gibt so dass*

$$\lim_{\|\varphi\|_X \to 0} \frac{|J(u+\varphi) - J(u) - A\varphi|}{\|\varphi\|_X} = 0\,.$$

*Der lineare Operator $A$ ist die* ***Fréchet-Ableitung*** *von $J$ in $u$ und oft bezeichnet mit $J'(u)$.*

**Bemerkung 2.2.2.** *Diese ist natürlich Verallgemeinerung der Konzept der Totaleableitung.*

**Zu restriktiv!**

**Die erste Variation** In Variationsrechnung arbeitet man mit der Verallgemeinerung der Konzept der partielle Ableitung.

**Definition 2.2.3.** *Sei $u \in V$ fest. Da $V$ offen ist, existiert für beliebige $\varphi \in X$ ein $\delta > 0$ so dass $u + t\varphi \in V$ für $|t| < \delta$ und somit ist die Abbildung*

$$(-\delta, \delta) \ni t \mapsto J(u + t\varphi) \text{ wohldefiniert.}$$

*Falls diese Abbildung in $t = 0$ differenzierbar ist, dann heisst*

$$\delta J(u)(\varphi) := \frac{d}{dt} J(u + t\varphi)\Big|_{t=0}$$

*die* ***erste Variation von*** *$J$* ***an der Stelle*** *$u$* ***in Richtung*** *$\varphi$.*

**Bemerkung 2.2.4.** *1. Falls $J$ Frechet-Differenzierbar in $u$ ist, dann gilt $\delta J(u)(\varphi) = J'(u)(\varphi)$.*

2. *Die Fréchet-Ableitung eines Funktionals sowie deren Existenz hängt vom Definitionsbereich $X$ des Funktionals ab. Die erste Variation ist unabhängig von der Topologie in $X$. In glatten Situationen stimmen sie überein. Die erste Variation ist insbesonders wichtig wenn man nicht in alle Richtungen variieren kann.*

3. *Die erste Variation wird auch* ***Gateaux-Differential*** *genannt. Es ist nicht zu verwechseln mit die Gateaux-Ableitung.*

Betrachte das Funktional

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx\,,$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ mit $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $F : V \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(V)$, $V = V_1 \times V_2 \times V_3$ mit $V_i$ offen und $\overline{\Omega} \subset V_1 \subset \mathbb{R}^n$, $V_2 \times V_3 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$.

NOTATION: Wir schreiben $F(x, z, p)$ so dass $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^m$ und $p \in R^{mn}$.

Da $V$ offen ist, existiert für $u$ so dass

$$\{(x, u(x), Du(x)) : x \in \overline{\Omega}\} \subset V\,, \tag{2.1}$$

und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, ein $\delta > 0$ so dass $J(u + t\varphi)$ wohldefiniert ist für alle $|t| < \delta$. Dann konnen wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(u + t\varphi)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_\Omega F(x, u(x) + t\varphi(x), Du(x) + tD\varphi(x))\, dx\bigg|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \partial_{z_i} F(x, u(x), Du(x))\varphi^i(x)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \partial_{p_j^i} F(x, u(x), Du(x))\partial_j \varphi^i(x)\, dx, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei $\varphi^i$ die $i$-te Komponente von $\varphi$ ist. **Diese ist die erste Variation von $J$ an der Stelle $u$ in Richtung $\varphi$.** Diese Formel schreiben wir in kompakter Form als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(u + t\varphi)\bigg|_{t=0} &= \int_\Omega D_z F(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi(x)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega D_p F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\varphi(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Falls $u$ ein Minimum von $J$ ist, dann gilt

$$\delta J(u)(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi\,.$$

Somit gilt

$$\int_\Omega D_z F(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi(x)\, dx \\ + \int_\Omega D_p F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\varphi(x)\, dx \; = 0 \qquad \forall \varphi\,, \tag{2.3}$$

wobei, abhängig vom Problem, dies gelten soll für alle $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ oder $\{\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$ oder $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$. Diese $\varphi$ heissen **Testfunktionen**.

**Definition 2.2.5.** *Die Gleichung* (2.3) *wird **die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung** genannt und $u$ **schwaches Extremum**.*

**Beispiel** *Die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung für die Brachistochrone.* Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, und $y_1, y_2 > 0$, betrachten wir das Funktional

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}}\, dx\,,$$

auf der Menge

$$V = \{u \in C^1([x_1, x_2]) :\; u(x_1) = y_1,\; u(x_2) = y_2 \text{ und } u > 0 \text{ auf } [x_1, x_2]\}\,.$$

Sei $\varphi \in C^1([x_1, x_2])$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Wegen der Stetigkeit existiert $\delta > 0$, so dass $u + t\varphi \in X$ für alle $|t| < \delta$. Dann ist $J(u + t\varphi)$ wohldefiniert. Wir können in jede solche Richtung $\varphi$ variieren!

Hier ist $m = n = 1$ und die Funktion $F(x, z, p)$ ist gegeben durch

$$F(x, z, p) = \sqrt{\frac{1 + p^2}{z}} \text{ definiert auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,,$$

und

$$D_z F(x, z, p) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + p^2}}{z^{\frac{3}{2}}}\,, \quad D_p F(x, z, p) = \frac{p}{\sqrt{z(1 + p^2)}}\,.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}J(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{u(x)(1+(u'(x))^2)}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{(u(x))^{\frac{3}{2}}}\varphi(x) \right) dx\,.$$

**Falls** zusätzlich $u \in C^2((x_1,x_2))$ können wir einmal partiell integrieren und da $\varphi$ in $x_1$ und $x_2$ Null ist, erreichen wir

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}J(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\ &\qquad = -\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx}\Big( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1+(u'(x))^2)}}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{(u(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

**Falls** $u \in C^2((x_1,x_2)) \cap C^0([x_1,x_2])$ ein Minimum ist, dann

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx}\Big( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1+(u'(x))^2)}}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{(u(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(x)\,dx = 0\,,$$

für alle $\varphi \in C^1([x_1,x_2])$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

**FRAGE:** Muss dann folgen, dass

$$\frac{d}{dx}\Big( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1+(u'(x))^2)}}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{(u(x))^{\frac{3}{2}}} = 0 \ \text{ auf } [x_1,x_2]?$$

Bevor wir diese Frage beantworten, merken wir, dass das was wir in diesem Beispiel gemacht haben wir auch allgemeiner machen können. Dazu brauchen wir den Gaußsche Integralsatz, siehe Appendix A.1. Aus der schwachen Form der Euler-Lagrange Gleichung (2.3) (siehe auch (2.2)), falls $F \in C^2$, $u \in C^2$ und $\Omega$ ein $C^1$-glatt berandetes Gebiet können wir partiell integrieren (d.h. den Gaußschen Integralssatz anwenden) und wir erreichen

$$\begin{aligned} &\int_\Omega D_zF(x,u(x),Du(x))\cdot\varphi(x)\,dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \partial_{p^i_j}F(x,u(x),Du(x))\nu^j\varphi^i(x)\,dS(x) \\ &\quad - \int_\Omega \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \partial_j\left(\partial_{p^i_j}F(x,u(x),Du(x))\right)\varphi^i(x)\,dx = 0\,, \end{aligned}$$

mit $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{n-1}$ die äußere Normale auf $\partial\Omega$. **Falls** $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$, erreichen wir

$$\int_\Omega D_z F(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi(x)\, dx \\ - \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j \Big( D_{p_j} F(x, u(x), Du(x)) \Big) \cdot \varphi(x)\, dx = 0\,. \tag{2.4}$$

Diese Gleichung wird **Integralform der Euler-Lagrange Gleichung** genannt.

Nun widmen wir uns der Antwort der Frage. Die Antwort ist: **Ja** und ist eine Konsequenz des folgenden sehr wichtigen Resultats.

**Satz 2.2.6** (Hauptlemma der Variationsrechnung)**.** *Sei* $f \in L^2(\Omega)$ *mit*

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)dx = 0 \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

*Dann ist* $f = 0$ *fast überall in* $\Omega$*.*

Diese Resultat gilt auch unter der schwächeren Annahme, dass $f \in L^1(\Omega)$, siehe [B, Cor. 4.24].

*Beweis.* Falls $f$ stetig: direkt!
Allgemeine Fall: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist (siehe Satz 2.1.5), existiert $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - \psi_\varepsilon\|_2 < \epsilon$. Dann

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_\Omega |f(x)|^2\, dx \\ &= \int_\Omega f(x) \cdot (f(x) - \psi_\varepsilon(x))\, dx \quad \text{(nach Voraussetzung)} \\ &\le \|f\|_2 \|f - \psi_\varepsilon\|_2 \quad \text{(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)} \\ &\le \varepsilon \|f\|_2\,. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|f\|_2 = 0$ und hieraus folgt $f = 0$ fast überall in $\Omega$. □

Aus Satz 2.2.6 und (2.4) folgt direkt folgendes Resultat:

**Satz 2.2.7.** *Sei $F \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn})$ und definiere für $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ das Funktional*

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx\,.$$

*Sei $U \subset C^1(\overline{\Omega})$ derart, dass für alle $u \in U$ und $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $u + t\varphi \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

*Wenn $J : U \to R$ ein globales Minimum in $\overline{u}$ hat und $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, dann erfüllt $\overline{u}$ das Euler-Lagrange Gleichungssystem*

$$\partial_{z^i} F(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \Big( \partial_{p_j^i} F(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) \Big) = 0\,, \tag{2.5}$$

*für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $x \in \overline{\Omega}$.*

*Beweis.* Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und wähle eine Test-Funktion $\varphi$, so dass nur die Komponente $\varphi^i$ nicht identisch Null ist. Die Behauptung folgt dann direkt aus Satz 2.2.6. □

**Beispiele**

1. **Brachistochrone** Die Euler-Lagrange Gleichung ist

$$\frac{d}{dx}\Big( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1 + (u'(x))^2)}} \Big) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{(u(x))^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ auf } [x_1, x_2].$$

2. Betrachte das Funktional

$$J(u) = \int_0^1 \Big( (u'(x))^2 + c(x)(u(x))^2 \Big)\, dx\,,$$

mit $c : I \to \mathbb{R}$, $c \in C^2([0,1])$, definiert auf

$$X = \{u \in C^1([0,1]) :\ u(0) = a \text{ und } u(1) = b\}\,,$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist

$$F(x, z, p) = p^2 + c(x) z^2 \text{ und } F \in C^2([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})\,.$$

Falls $u \in C^2([0,1])$ ein globales Minimum von $J$ ist, dann löst $u$ folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 2c(x)u(x) - \frac{d}{dx}(2u'(x)) &= 0 \text{ in } [0,1]\,,\\ u''(x) - c(x)u(x) &= 0 \text{ in } [0,1]\,. \end{aligned}$$

Es ist nun ganz natürlich, sich die Frage zu stellen, ob jeder Minimierer $C^2$-glatt ist. Wir werden im nächsten Beispiel sehen, dass das nicht der Fall ist.

**Beispiel:** *Ein Minimierer, der nicht $C^2$-glatt ist.* Betrachte

$$J(u) = \int_{-1}^{1} (u(x))^2 (2x - u'(x))^2 \, dx \,,$$

definiert für $u \in C^1([-1,1])$ mit $u(-1) = 0$ und $u(1) = 1$.

Betrachte nun die Funktion

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,0], \\ x^2 & \text{für } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dann gilt $\overline{u} \in C^1([-1,1])$, $\overline{u}(-1) = 0$, $\overline{u}(1) = 1$, also $J(\overline{u}) = 0$. Da $J(u) \geq 0$ für alle $u$, folgt dass

$$J(\overline{u}) = \inf_u J(u) \,.$$

Somit ist $\overline{u}$ globales Minimum und Lösung der schwachen Form der Euler-Lagrange Gleichung. Allerdings gilt $u \notin C^2((-1,1))$. Man könnte auch zeigen, dass $\overline{u}$ der eindeutige Minimierer ist.

Im Allgemeinen ist das Infimum kein Minimum!

**Beispiel:** *Ein Problem für welches das Infimum nicht $C^1$-glatt ist.* Betrachte

$$J(u) = \int_{-1}^{1} \Big( (u'(x))^2 - 1 \Big)^2 \, dx \,,$$

definiert auf

$$U := \{ u \in C^1([-1,1]) : \; u(-1) = u(1) = 0 \} \,.$$

Durch geeignete Wahl von Funktionen kann man zeigen, dass

$$\inf_{u \in U} J(u) = 0 \,.$$

Allerdings gilt für alle $u \in U$: $J(u) > 0$. In der Tat, wäre $J(u) = 0$ dann wäre $|u'(x)| = 1$ für alle $x \in [-1,1]$. Da $u \in C^1([-1,1])$, müsste $u'(x) \equiv 1$ oder $u'(x) \equiv -1$ in $[-1,1]$ und die Randbedingungen können nicht erfüllt werden.

Wir müssen eine größere Klasse von Funktionen betrachten. Sei

$$\begin{aligned} C^0_{\text{st}}([-1,1]) &= \{\text{stückweise stetige Funktionen von } [-1,1] \to \mathbb{R}\} \,, \\ C^k_{\text{st}}([-1,1]) &= \{ u \in C^{k-1}([-1,1]) : \; u^{(k)} \in C^0_{\text{st}}([-1,1]) \} \end{aligned}$$

und

$$V := \{u \in C^1_{\mathrm{st}}([-1,1]) : \; u(-1) = u(1) = 0\} .$$

Nun

$$\inf_{u \in V} J(u) = J(\overline{u}) ,$$

wobei

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1-x & \text{für } x \in (0,1]. \end{cases}$$

MORAL: Die Wahl der Klasse der zulässigen Funktionen ist entscheidend.
Achtung: $\overline{u}$ ist nicht der einzige Minimierer! Zick-Zack Funktionen.

**Klassische Beispiel: Rotationssymmetrische Minimalflächen**

Wir haben in Paragraph 1.3.2 gesehen, dass der Flächeninhalt einer Rotationsfläche erzeugt durch den Graphen einer positiven Funktion

$$u : [0,1] \to (0, \infty)$$

gegeben ist durch

$$J(u) = \int_0^1 u(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx .$$

Wir wollen dieses Funktional minimieren auf der Menge

$$X_\alpha := \{u \in C^1([0,1]) : \; u(0) = u(1) = \alpha \text{ und } u > 0\} .$$

Wir berechnen zuerst die erste Variation. Sei $u \in X_\alpha$ und $\varphi \in C^\infty_0([0,1])$. Dann ist $u + t\varphi \in X_\alpha$ für $t$ klein genug und

$$\delta J(u)(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx + \int_0^1 u(x) \frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}\, dx .$$

Falls $u \in C^2([0,1])$, dann

$$\delta J(u)(\varphi) = \int_0^1 \left( \sqrt{1 + (u'(x))^2} - \frac{d}{dx}\Big( \frac{u(x)u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \Big) \right) \varphi(x)\, dx .$$

Somit lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\sqrt{1 + (u'(x))^2} - \frac{d}{dx}\Big( \frac{u(x)u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \Big) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{1+(u'(x))^2} - \frac{(u'(x))^2}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} - \frac{u(x)u''(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} + \frac{u(x)(u'(x))^2u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1+(u'(x))^2} - \frac{(u'(x))^2}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} - \frac{u(x)u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
&\Leftrightarrow u(x)u''(x) = 1+(u'(x))^2\,.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Gleichung bemerken wir gleich eine Eigenschaft der Lösungen: diese sind konvex! Können wir diese Differentialgleichung lösen? Dazu ist folgendes Resultat nützlich.

**Satz 2.2.8.** *Sei $I$ ein Intervall, $F \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m)$, $u \in C^2(I;\mathbb{R}^m)$ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung* (2.5) *und betrachte die Funktion $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,*

$$
\Phi(x,z,p) = p\cdot(\partial_p F)(x,z,p) - F(x,z,p)\,.
$$

*Dann gilt*

$$
\frac{d}{dx}[\Phi(x,u(x),u'(x)] = -(\partial_x F)(x,u(x),u'(x))\,.
$$

*Insbesondere, falls $F = F(z,p)$ dann gilt*

$$
\Phi(x,u(x),u'(x)) \equiv \textit{konstant.}
$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt mit einer direkten Rechnung.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[\Phi(x,u(x),u'(x)] \\
&= \frac{d}{dx}[u'(x)\cdot(\partial_p F)(x,u(x),u'(x)) - F(x,u(x),u'(x))] \\
&= u''(x)\cdot(\partial_p F)(x,u,u') + u'(x)\frac{d}{dx}[(\partial_p F)(x,u(x),u'(x))] \\
&\quad - (\partial_x F)(x,u,u') - (\partial_z F)(x,u,u')u'(x) - (\partial_p F)(x,u,u')u''(x) \\
&= +u'(x)\left[\frac{d}{dx}\Big((\partial_p F)(x,u(x),u'(x))\Big) - (\partial_z F)(x,u,u')\right] \\
&\quad - (\partial_x F)(x,u,u')u'(x) \\
&= -(\partial_x F)(x,u,u')u'(x)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzte Schritt benutzt haben, dass $u$ (2.5) löst. □

Für die Minimalflächengleichung gilt dann $\Phi(x, u(x), u'(x)) \equiv$ konstant, d.h.

$$\frac{(u'(x))^2 u(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} - u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2} \equiv C\,,$$

$$\Leftrightarrow (u'(x))^2 u(x) - u(x)(1+(u'(x))^2) = C\sqrt{1+(u'(x))^2}\,,$$

$$\Leftrightarrow u(x) = -C\sqrt{1+(u'(x))^2} \text{ mit } C < 0,$$

$$\text{d.h. } u(x) = \gamma\sqrt{1+(u'(x))^2} \text{ mit } \gamma > 0.$$

Die Funktion $u(x) \equiv \gamma$ in $[0,1]$ ist Lösung, aber nicht Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Somit, $u \not\equiv \gamma$ und $u \geq \gamma$. Dann existiert eine Funktion $v(x)$ so dass

$$u(x) = \gamma \cosh(v(x))\,.$$

Die Differentialgleichung für $u$ transformiert sich in

$$\begin{aligned}
\gamma \cosh(v(x)) &= \gamma\sqrt{1+\gamma^2(\sinh(v(x)))^2(v'(x))^2} \\
\Leftrightarrow \quad \gamma^2(\cosh(v(x)))^2 &= \gamma^2 + \gamma^4(\sinh(v(x)))^2(v'(x))^2 \\
\Leftrightarrow \quad \gamma^2(\sinh(v(x)))^2 &= \gamma^4(\sinh(v(x)))^2(v'(x))^2 \\
\Leftrightarrow \quad \gamma^2(\sinh(v(x)))^2(1-\gamma^2(v'(x))^2) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Da $u(x) \equiv \gamma$ nicht Lösung ist, existiert $x^* \in [0,1]$ so dass $v(x^*) \neq 0$. Dann gilt in einer Umgebung von $x^*$

$$(v'(x))^2 = \gamma^{-2} \Leftrightarrow v'(x) = \pm\frac{1}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow v(x) = \pm\frac{1}{\gamma}x + x_0\,.$$

Da cosh eine gerade Funktion ist, ist die allgemeine Lösung

$$u(x) = \gamma \cosh\left(\frac{1}{\gamma}x + x_0\right)\,,$$

mit $\gamma > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Die Lösung soll aber den Randwerten genügen: $u(0) = u(1) = \alpha$. Wir haben

$$u(0) = \gamma \cosh(x_0) \text{ und } u(1) = \gamma \cosh\left(\frac{1}{\gamma} + x_0\right)\,.$$

Es soll gelten

$$\cosh(x_0) = \cosh(x_0 + \frac{1}{\gamma})\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$-x_0 = x_0 + \frac{1}{\gamma}\,. \quad \text{D.h. } x_0 = -\frac{1}{2\gamma}.$$

Nun soll gelten

$$\alpha = \gamma \cosh\left(\frac{1}{2\gamma}\right)\,,\ \text{äquivalent zu } \frac{\cosh\left(\frac{1}{2\gamma}\right)}{\frac{1}{2\gamma}} = 2\alpha\,.$$

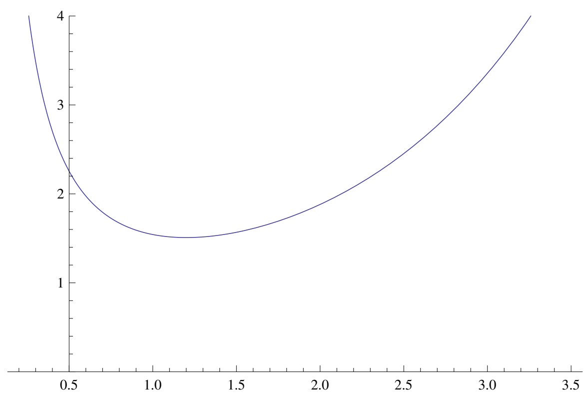



Abbildung 2.1: Graph der Funktions $x \mapsto \frac{\cosh(x)}{x}$.

In Abhängigkeit von $\gamma$ gibt es entweder keine Lösung oder eine eindeutige Lösung oder zwei Lösungen. Eine Allgemeine Resultat in diese Richtung : Meeks, White, *Minimal surfaces bounded by convex curves in parallel planes*, Comm.Math.Helv. 66 (1991).

## 2.3 Regularität in Dimension 1

Hier arbeiten wir nur in Dimension 1. Deswegen schreiben wir $I$ an Stelle von $\Omega$. Hier ist $I$ ein beschränktes nicht-leeres offenes Intervall.

In Satz 2.2.7 mussten wir annehmen dass $u \in C^2(\overline{I})$. Gibt es Annahmen an $J$ so dass aus $u$ Minimum und $u \in C^1(\overline{I})$ auch $u \in C^2(\overline{I})$ folgt?
IDEE Regularität soll aus der Minimierungseigenschaft folgen.

**Lemma 2.3.1** (Zweites Hauptlemma der Variationsrechnung)**.** *Sei $u \in C(\overline{I})$ so dass*

$$\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I)\,.$$

*Dann gilt $u \equiv$ konstant in $\overline{I}$.*

*Beweis.* Sei $I = (a, b)$. Falls $u \in C^1(\overline{I})$ ist die Aussage klar.
Allgemeiner Fall: Betrachte $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ so dass

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(x) \equiv 0 & \text{falls } x \leq \frac{1}{10}, \\ \chi(x) \equiv 1 & \text{falls } x \geq \frac{9}{10}, \\ \chi'(x) \geq 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ und definiere

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(s)\,ds - \chi(\frac{x-a}{b-a}) \int_a^b \varphi(s)\,ds\,.$$

Dann $\psi(a) = 0 = \psi(b)$, $\mathrm{Supp}(\psi) \subset (a, b)$ und $\psi \in C_0^\infty(a, b)$.

Aus der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x)\psi'(x)\,dx \\ &= \int_a^b u(x) \left( \varphi(x) - \frac{1}{b-a}\chi'(\frac{x-a}{b-a}) \int_a^b \varphi(s)\,ds \right) dx \\ &= \int_a^b \varphi(x) \left( u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \chi'(\frac{s-a}{b-a}) u(s)\,ds \right) dx\,, \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty([a, b])$. Das Hauptlemma der Variationsrechnung (Satz 2.2.6) impliziert dann

$$u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \chi'(\frac{s-a}{b-a}) u(s)\,ds = \text{ konstant.}$$

□

**Folgerung 2.3.2.** *Sei $u \in C(\overline{I};\mathbb{R}^m)$ so dass*

$$\int_I u(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R}^m)\,.$$

*Dann existiert ein Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ so dass $u \equiv v$ in $\overline{I}$ gilt.*

**Bemerkung 2.3.3.** *Eine analoge Aussage gilt auch für Funktionen mehrer Variablen. Nämlich:*
*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ so dass*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ und } i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

*Dann gilt $u \equiv$ konstant in $\overline{\Omega}$.*

Das folgende Resultat gibt Bedingungen an die Funktion $F$, so dass ein $C^1$-Minimum sogar 2-mal stetig differenzierbar ist. Insbesondere ist sie Lösung der Euler-Lagrange Gleichung.

**Satz 2.3.4.** *Seien $I = (a, b)$ und $F \in C^2(\overline{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Für $u \in C^1(\overline{I})$ betrachte das Funktional*

$$J(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x))\, dx\,.$$

*Sei $U \subset C^1(\overline{I})$ derart, dass es für jedes $u \in U$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $u + t\varphi \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wenn $J : U \to \mathbb{R}$ ein globales Minimum $\tilde{u} \in C^1(\overline{I})$ hat und $\partial_p^2 F(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt $\tilde{u} \in C^2(\overline{I})$.*

*Beweis.* Da $\tilde{u} \in C^1(\overline{I})$ Minimum in $I$ ist, gilt

$$\int_a^b \left((\partial_z F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x))\varphi(x) + (\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x))\varphi'(x)\right)\, dx = 0\,,$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty([a, b])$. Da wir nicht wissen ob $\tilde{u}'$ differenzierbar ist, können wir nicht partiell integrieren. Wir können aber in die andere Richtung partiell integrieren. Nämlich

$$(\partial_z F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) = \frac{d}{dx} \int_a^x (\partial_z F)(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s))\, ds\,.$$

Somit erreichen wir

$$\int_a^b \left(-\int_a^x (\partial_z F)(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s))\, ds + (\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x))\right) \varphi'(x)\, dx = 0\,,$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty([a,b])$. Lemma 2.3.1 impliziert, dass eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert so dass

$$-\int_a^x (\partial_z F)(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s))\, ds + (\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) = c \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Nun sei

$$q(x) := c + \int_a^x (\partial_z F)(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s))\, ds\,.$$

Aus der Definition folgt, dass $q \in C^1(\overline{I})$ und somit ist die Funktion

$$x \mapsto (\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \text{ in } C^1(\overline{I})\,.$$

Das reicht aber noch nicht!

Wir betrachten nun die Gleichung

$$(\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) - q(x) = 0\,. \tag{2.6}$$

Sei $x_0 \in (a,b)$ beliebig und $p_0 := \tilde{u}'(x_0)$. Dann $(x_0, p_0)$ löst (2.6).
Da $(\partial_p^2 F)(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt, dass wir die Gleichung implizit lösen können in einer Umgebung von $(x_0, p_0)$. Sei $P(x)$ derart, dass $P(x_0) = p_0$ und

$$(\partial_p F)(x, \tilde{u}(x), P(x)) - q(x) = 0\,,$$

in einer Umgebung von $x_0$. Dann gilt auch $P \in C^1((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ für $\varepsilon > 0$ klein genug und

$$P'(x) = \frac{(\partial_z F)(x, \tilde{u}, \tilde{u}') - (\partial_{px}^2 F)(x, \tilde{u}, P) - (\partial_{pz}^2 F)(x, \tilde{u}, P)\tilde{u}'(x)}{(\partial_p^2) F(x, \tilde{u}, P)}\,. \tag{2.7}$$

Da $P(x)$ die eindeutige Lösung in einer Umgebung von $x_0$ von (2.6) ist und $\tilde{u}'(x)$ eine Lösung ist, folgt erstens $\tilde{u}'(x) = P(x)$, dann $\tilde{u}' \in C^1((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$. D.h. $\tilde{u} \in C^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ und da $x_0$ beliebig, dass $\tilde{u} \in C^2(I)$.

Aus (2.7) mit $P(x) = \tilde{u}'(x)$ sehen wir, dass $\tilde{u}''$ gleichmäßig stetig auf $I$ ist und somit eindeutig stetig fortsetzbar auf $\overline{I}$. Die Behauptung folgt. $\square$

**Beispiel:** Betrachte das Funktional

$$J(u) = \int_0^1 (\sqrt{1 + (u'(x))^2} - 1 - f(x)u(x))\, dx\,,$$

mit $f \in C^2([0,1])$. Dann

$$F(x,z,p) = \sqrt{1+p^2} - 1 - f(x)z \text{ und } (\partial_p^2 F)(x,z,p) = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0\,.$$

Falls dann das Funktional ein globales Minimum in $C^1(\overline{I})$ besitzt, ist dieses Minimum sicherlich zweimal stetig differenzierbar!

**Bemerkung 2.3.5.** *Satz 2.3.4 lässt sich auch anwenden auf das klassische Beispiel von rotationssymmetrischen Minimalflächen.*

## 2.4 Konvexität

**Definition 2.4.1.** *Sei $X$ ein normierter Raum.*

1. *$M \subset X$ heißt* ***konvex****, wenn für jedes $x, y \in M$ und $\theta \in (0,1)$ gilt $\theta x + (1-\theta)y \in M$.*

2. *Sei $M \subset X$ konvex. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* ***konvex*** *(bzw.* ***strikt konvex****), wenn für jedes $x, y \in M$, $x \neq y$, und $\theta \in (0,1)$ gilt*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$
$$\Big(\textit{bzw. } f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)\Big)\,.$$

**Lemma 2.4.2.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

1. *$f$ konvex;*

2. *für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$;*

3. *für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Df(x) - Df(y), x - y\rangle \geq 0$;*

4. *$Epi(f) := \{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | f(x) \leq u\}$ ist konvex.*

Beweis in der Übung.

**Bemerkung 2.4.3.**

1. *Die erste Äquivalenz könnte auch ohne differenzierbarkeit gestellt werden.*
   *$f$ konvex $\Leftrightarrow$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert $p_{y_0} \in \mathbb{R}^n$ so dass $f(y) \geq f(y_0) + p_{y_0}(y - y_0)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Falls $f : X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf einem Banachraum ist, ist die Aussage ähnlich wie die Hahn-Banach Aussage.*

**Proposition 2.4.4.** *Sei $X$ ein normierter Raum. Wenn $C \subset X$ konvex ist und $J : C \to \mathbb{R}$ strikt konvex ist, dann hat $J$ höchstens ein lokales Minimum in $C$.*

*Beweis.* Seien $u, v$ lokale Minima in $C$ von $J$ mit $J(u) \geq J(v)$. Da $C$ konvex, gilt $tu + (1-t)v \in C$ für alle $t \in [0,1]$. Da $J$ strikt konvex:

$$J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v) \leq J(u) \text{ für alle } t \in (0,1)\,.$$

Widerspruch, da $u$ lokales Minimum ist und $tu + (1-t)v$ beliebig nah an $u$ sein kann! □

**FRAGE:** Wann ist $J$ konvex?
Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ ist konvex.

**Lemma 2.4.5.** *Sei $F \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Wenn*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (z,p) \mapsto F(x,z,p) \text{ (strikt) konvex ist,}$$

*für jedes $x \in \overline{\Omega}$, dann ist $J : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

*auch (strikt) konvex.*

*Beweis.* Seien $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ und $t \in (0,1)$, dann

$$\begin{aligned} J(tu + (1-t)v) &= \int_\Omega F(x, tu + (1-t)v, tDu + (1-t)Dv)\, dx \\ &\leq t \int_\Omega F(x, u, Du)\, dx + (1-t) \int_\Omega F(x, v, Dv)\, dx \\ &= tJ(u) + (1-t)J(v)\,. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.4.6.** *Sei $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ so dass*

$$(z,p) \mapsto F(x,z,p) \text{ konvex ist für jedes } x \in \overline{\Omega}\,.$$

*Sei*

$$J(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

*definiert auf $C := \{f \in C^1(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$.*

1. *Falls $\overline{u} \in C$ so ist, dass $\delta J(\overline{u})(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C$, dann ist $\overline{u}$ ein Minimum.*

2. *Falls $(z,p) \mapsto F(x,z,p)$ **strikt** konvex ist für jedes $x \in \overline{\Omega}$, dann ist $\overline{u}$ das eindeutige Minimum.*

*Beweis.* Da $F$ konvex und $C^2$ haben wir, dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und für alle $(z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$F(x,z,p) \geq F(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) + \begin{pmatrix} (\partial_z F)(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) \\ (\partial_p F)(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z - \overline{u}(x) \\ p - D\overline{u}(x) \end{pmatrix},$$

siehe Lemma 2.4.2(2). Nun gilt für $u \in C$

$$\begin{aligned}
J(u) - J(\overline{u}) &= \int_\Omega \left(F(x, u(x), Du(x)) - F(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x))\right)\, dx \\
&\geq \int_\Omega \begin{pmatrix} (\partial_z F)(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) \\ (\partial_p F)(x, \overline{u}(x), D\overline{u}(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x) - \overline{u}(x) \\ Du(x) - D\overline{u}(x) \end{pmatrix} dx \\
&= \delta J(\overline{u})(u - \overline{u}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Also $J(u) \geq J(\overline{u})$ für alle $u \in C$. Die zweite Aussage folgt aus Proposition 2.4.4. $\square$

**Résumé** Falls $F$ konvex ist, so ist eine Lösung der Differentialgleichung ein Minimierer. Das gilt aber nicht allgemein!

**Beispiel:** Betrachte

$$J(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\, dx \ \text{ auf } C = \{u \in C^1([0,1]) :\ u(0) = u(1) = 0\}\,.$$

Dann $F(x, z, p) = e^{-p^2}$ und die Euler-Lagrange Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}((\partial_p F)(x, u, u')) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(-2u'(x)e^{-(u'(x))^2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2u'(x)e^{-(u'(x))^2} = \text{konstant}\,.
\end{aligned}$$

Eine Lösung ist $\overline{u}(x) \equiv 0$ und $J(\overline{u}) = \int_0^1 e^0\, dx = 1$. Während $J(u) \leq 1$ für alle $u \in C$. Diese Lösung ist kein lokales Minimum aber ein lokales Maximum!

Weiter gibt es keine Minimierer! Betrachte die Folge $u_n(x) = n(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{n}{4}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $u_n \in C$ für alle $n$ und

$$J(u_n) = \int_0^1 e^{-(2n(x-\frac{1}{2}))^2}\, dx = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty\,,$$

so dass

$$\inf_{u \in C} J(u) = 0 \text{ aber } J(u) > 0 \text{ für alle } u \in C\,.$$

## 2.5 Innere Variation

Sei $F : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes Gebiet, $F \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mn})$ und

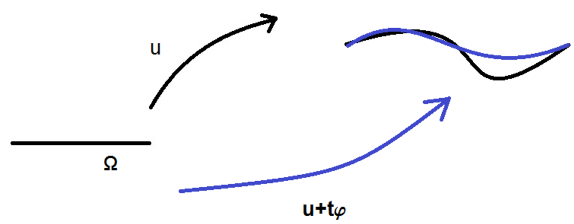
$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx\,,$$

definiert in $C^1(\overline{\Omega})$.

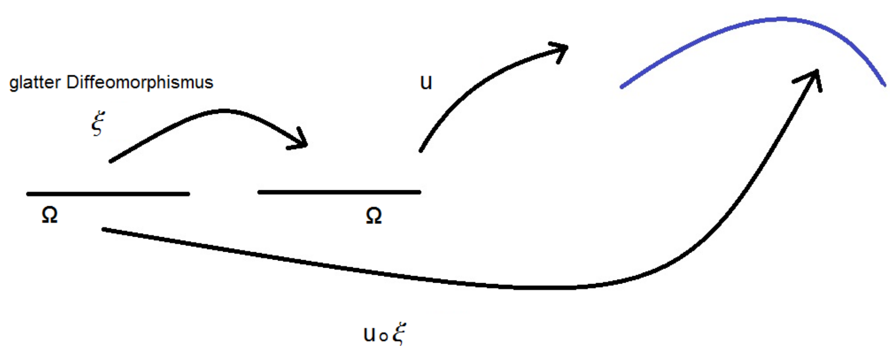
Die Erste Variation ist definiert als

$$\frac{d}{dt}J(u+t\varphi)\bigg|_{t=0} = 0 \text{ für } \varphi \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\,.$$

Wir machen eine Variation im Bild.




Nun: Variation im Urbild!




**Definition 2.5.1.** *Sei $\lambda \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $\varepsilon_0 > 0$. Betrachte eine Abbildung*

$$\xi : \overline{\Omega} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \overline{\Omega}\,,$$

*so dass*

*1. $\varepsilon \mapsto \xi(x,\varepsilon)$ ist glatt für alle $x \in \overline{\Omega}$;*

*2. $\xi(\cdot,\varepsilon) : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ ist ein Diffeomorphismus für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$;*

*3. $\xi(x,0) = x$ für alle $x \in \overline{\Omega}$;*

*4. $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\xi(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \lambda(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$;*

*5. $\xi(x,\varepsilon) = x$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.*

*Wir nennen $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}$ mit diesen Eigenschaften eine **zulässige Parametertransformation**.*

**Bemerkung 2.5.2.** *Ein Beispiel für eine solche zulässige Parametertransformation ist*

$$\xi(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\lambda(x) \text{ für } |\varepsilon| < \varepsilon_0 \text{ mit } \varepsilon_0 \text{ klein genug.}$$

*1., 3., 4. und 5. sind klar. Es bleibt 2. zu verifizieren. Diese ist die einzige der Bedingungen, die die Kleinheit von $\varepsilon$ braucht. Wir haben*

$$\begin{aligned}|\xi(x_1,\varepsilon) - \xi(x_2,\varepsilon)| &\geq |x_1 - x_2| - |\varepsilon||\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \\ &\geq |x_1 - x_2| - |\varepsilon|K|x_1 - x_2| \text{ (mit } K \text{ Lip. konst. von } \lambda) \\ &> \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\,,\end{aligned}$$

*falls $|\varepsilon|K < \frac{1}{2}$. Äquivalent dazu $|\varepsilon| < \frac{1}{2K} := \varepsilon_1$. Daraus folgt dass $D_x\xi(\overline{x},\varepsilon)$ injektiv ist für alle $\overline{x} \in \Omega$ und somit ist $D_x\xi(\overline{x},\varepsilon)$ invertierbar für alle $\overline{x} \in \Omega$. Aus dem Satz von der Inversen Funktion ergibt sich, dass $\xi(\cdot,\varepsilon)$ ein $C^\infty$-Diffeomorphismus für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ ist.*

*Da $\xi(x,\varepsilon) = x$ für alle $x$ nah genug am $\partial\Omega$, existiert $\varepsilon_2 > 0$ so dass*

$$\xi(\cdot,\varepsilon) : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega} \text{ für alle } |\varepsilon| < \varepsilon_2\,.$$

*Wähle $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.*

**Definition 2.5.3.** *1. Sei $\lambda \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}$ eine zulässige Parametertransformation mit*

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\xi(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \lambda(x)\,.$$

*Dann heißt für $u \in C^1(\overline{\Omega})$,*

$$\partial J(u)(\lambda) := \frac{d}{d\varepsilon} J(u \circ \xi(\cdot, \varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0}$$

***innere Variation*** *von $J$ an der Stelle $u$ in Richtung $\lambda$.*

2. *Eine Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\partial J(u)(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in C_0^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ heißt* ***innere Extremale*** *von $J$.*

**Lemma 2.5.4.** *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ so dass*

$$J(u) \leq J(u \circ \xi(\cdot, \varepsilon))$$

*für alle $|\varepsilon|$ klein genug und beliebige zulässige Parametertransformationen $\{\xi(\cdot, \varepsilon)\}_{|\varepsilon| < \varepsilon_0}$. Dann ist $u$ eine innere Extremale von $J$.*

*Beweis.* Sei $\lambda \in C_0^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $\xi(\cdot, \varepsilon)$ die zulässige Parametertransformation assoziiert zu $\lambda$ und konstruiert wie in Bemerkung 2.5.2. Dann

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J(u \circ \xi(\cdot, \varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0} = \partial J(u)(\lambda)\,.$$

Da $\lambda$ beliebig ist, folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.5.5** (Analog zu schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung)**.** *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\lambda \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\partial J(u)(\lambda) = &\int_\Omega (D_x F)(y, u(y), Du(y))(-\lambda(y))\, dy \\ &+ \int_\Omega \sum_{i,j,k} (D_{p_j^i} F)(y, u(y), Du(y)) \partial_k u^i(y) \partial_j \lambda^k(y)\, dy \\ &+ \int_\Omega F(y, u(y), Du(y))(-\mathrm{div}\lambda(y))\, dy\,.\end{aligned}$$

*Beweis.* Da $D_x(u \circ \xi)(x, \varepsilon) = (D_x u)(\xi(x, \varepsilon)) D_x \xi(x, \varepsilon)$ ($D_x u$ eine $(m \times n)$-Matrix, $D_x \xi$ eine $(n \times n)$-Matrix) haben wir

$$J(u \circ \xi(\cdot, \varepsilon)) = \int_\Omega F(x, (u \circ \xi)(x, \varepsilon), (D_x u)(\xi(x, \varepsilon)) D_x \xi(x, \varepsilon))\, dx\,.$$

Für $\varepsilon$ fest, sei $\eta(x, \varepsilon) := (\xi)^{-1}(x, \varepsilon)$. Dann gilt mit der Transformationsformel

$$J(u \circ \xi(\cdot, \varepsilon)) = \int_\Omega F(\eta(y, \varepsilon), u(y), (D_x u)(y) D_x \xi(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon)) |\det(D\eta(y, \varepsilon))|\, dy\,.$$

Da $\xi(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\lambda(x) + o(\varepsilon)$, folgt $\eta(y,\varepsilon) = y - \varepsilon\lambda(y) + o(\varepsilon)$ da

$$\begin{aligned} x &= y - \varepsilon\lambda(x) + o(\varepsilon) \\ &= y - \varepsilon\lambda(y - \varepsilon\lambda(x) + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) = y - \varepsilon\lambda(y) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

D.h. $D_y\eta(y,\varepsilon) = Id - \varepsilon D\lambda(y) + o(\varepsilon)$. Insbesondere für $\varepsilon$ klein genug

$$|\det(D\eta(y,\varepsilon))| = \det(D\eta(y,\varepsilon))$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\eta(y,\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} &= -\lambda(y), \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(D_x\xi)(\eta(y,\varepsilon),\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(Id + \varepsilon D\lambda(\eta(y,\varepsilon)) + o(\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= D\lambda(y)\,, \\ D_x\xi(\eta(y,0)) &= D\xi(y) = Id \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\det(D\eta(y,\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0} &= -\mathrm{div}(\lambda)\,, \end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass für eine $C^1$-Abbildung $t \mapsto A(t)$ mit $A(t)$ $n \times n$-Matrix mit $A(0) = Id$, gilt dass

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))\bigg|_{t=0} = \mathrm{Spur}(A'(t))|_{t=0}\ .$$

Somit

$$\begin{aligned} \partial J(u)(\lambda) = &\ \frac{d}{d\varepsilon}J(u \circ \xi(\cdot,\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0} \\ = &\ \frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega F(\eta(y,\varepsilon), u(y), (D_xu)(y)D_x\xi(\eta(y,\varepsilon),\varepsilon))\det(D\eta(y,\varepsilon))\ dy\bigg|_{\varepsilon=0} \\ = &\int_\Omega (D_xF)(y,u(y),Du(y))(-\lambda(y))\ dy \\ &+ \int_\Omega \sum_{i,j,k}(D_{p^i_j}F)(y,u(y),Du(y))\partial_k u^i(y)\partial_j\lambda^k(y)\ dy \\ &+ \int_\Omega F(y,u(y),Du(y))(-\mathrm{div}\lambda(y))\ dy\,. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.5.6.** *Die innere Variation und die erste Variation sind im Allgemeinen verschieden! In der ersten Variation gibt es $D_zF$, aber nicht in der inneren Variation, während in der inneren Variation es den Term $(D_xF)$ gibt, der in der ersten Variation nicht präsent ist.*

Auch hier kann man mit mehr Regularitätsannahmen eine lokale Gleichung bekommen.

**Satz 2.5.7.** *Falls $D_pF \in C^1$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dann gilt für alle $\lambda \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*

$$\begin{aligned}
&\partial J(u)(\lambda) \\
&\quad = -\int_\Omega \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \Big( (D_{p_j^i}F)(y,u,Du) \Big) - (D_{z^i}F)(y,u,Du) \right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sum_{k=1}^n \partial_k u^i(y) \lambda^k(y)\, dy.
\end{aligned}$$

*Insbesondere, falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine innere Extremale ist, dann*

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \Big( (D_{p_j^i}F)(y,u,Du) \Big) - (D_{z^i}F)(y,u,Du) \right] \partial_k u^i(y) = 0\,,$$

*für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Diese Gleichung wird **Noether Gleichung** genannt.*

*Beweis.* Mit partieller Integration, da $\lambda \equiv 0$ auf $\partial\Omega$, haben wir

$$\begin{aligned}
\partial J(u)(\lambda) = &\int_\Omega (D_xF)(y,u(y),Du(y))(-\lambda(y))\, dy \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big[ (D_{p_j^i}F)(y,u(y),Du(y)) \Big] \partial_k u^i(y) \lambda^k(y)\, dy \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j,k} (D_{p_j^i}F)(y,u(y),Du(y)) \partial_{kj}^2 u^i(y) \lambda^k(y)\, dy \\
&+ \int_\Omega \sum_k (\partial_{x_k}F)(y,u(y),Du(y)) \lambda^k(y))\, dy \\
&+ \int_\Omega \sum_{i,k} (\partial_{z^i}F)(y,u(y),Du(y)) \partial_k u^i(y) \lambda^k(y)\, dy \\
&+ \int_\Omega \sum_{i,j,k} \partial_{p_j^i} F(y,u(y),Du(y)) \partial_{jk}^2 u^i(y) \lambda^k(y))\, dy
\end{aligned}$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (D_{p_j^i} F)(y, u(y), Du(y)) \right] \partial_k u^i(y) \lambda^k(y) \, dy$$
$$+ \int_\Omega \sum_{i,k} (\partial_{z^i} F)(y, u(y), Du(y)) \partial_k u^i(y) \lambda^k(y) \, dy \, .$$

Die zweite Aussage folgt aus dem Hauptlemma der Variationsrechnung. □

**Korollar 2.5.8.** *Sei $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn})$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Dann ist $u$ ein innere Extremale.*

*Beweis.* Da $u$ Lösung der Euler-Lagrange Gleichung, gilt mit Satz 2.2.7

$$\sum_{j=1}^m \partial_{x_j} \Big( (D_{p_j^i} F)(y, u, Du) \Big) - (D_{z^i} F)(y, u, Du) = 0 \, , \tag{2.8}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. □

**Bemerkung 2.5.9.** 1. *Aus der Noether Gleichung folgt, dass das Euler-Lagrange Gleichungssystem 2.8 orthogonal zu $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}$ ist. Falls $n \leq m$ und die Menge $\{z = u(x) | x \in \Omega\}$ lokal eine Mannigfaltigkeit ist, dann beschreibt das Euler-Lagrange Gleichungssystem ein Vektorfeld orthogonal zur Tangentialebene! D.h. ein Normalenvektorfeld.*

2. *Im Allgemeinen: Schwache Extremale $\not\Rightarrow$ innere Extremale. Man braucht die $C^2$-Regularität.*

**Beispiel:** Sei $n = 1$ und $m = 2$. Betrachte das Funktional

$$J(u) := \int_0^1 F(u'(x)) \, dx$$

definiert auf $C^1([0,1] : \mathbb{R}^2)$ mit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, so dass eine stetige nicht-konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $DF(c(t)) \equiv 0$ aber $F(c(t)) \not\equiv$ konstant existiert. Die Existenz einer solche Funktion ist bewiesen von Whitney *A function non-constant on a connected set of critical points*, Duke Math.J. 1 (1935).

Betrachte dann die Funktion

$$u(x) := a + \int_0^x c(t) \, dt$$

mit $a \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann $u'(x) \equiv c(x)$ für alle $x$ und

$$\delta J(u)(\varphi) = \int_0^1 \langle (DF)(c(x)), \varphi'(x) \rangle \, dx = 0\,,$$

für alle $\varphi \in C^1([0,1])$. Somit ist $u$ schwaches Extremal. Ist $u$ auch inneres Extremal? Es gilt

$$\begin{aligned} \partial J(u)(\lambda) &= \int_0^1 (D_p F)(u'(y)) u'(y) \lambda'(y) \, dy - \int_0^1 F(u'(y)) \lambda'(y) \, dy \\ &= - \int_0^1 F(u'(y)) \lambda'(y) \, dy\,. \end{aligned}$$

Diese Integral ist nicht Null für alle $\lambda \in C_0^\infty([0,1])$, da $F(c(t)) \not\equiv$ konstant.

**Beispiel:** (Parameterunabhängige Integrale) Hier sei $n = 2$ und $m = 3$. Betrachte das Funktional

$$J(u) := \mathcal{A}(u) = \int_\Omega |u_x \times u_y| dx dy\,,$$

wobei $|u_x \times u_y| = \sqrt{|u_x|^2 |u_y|^2 - (\langle u_x, u_y \rangle)^2} = F(u_x, u_y)$. Eine glatte reguläre (d.h. Rang von $Du$ maximal) injektive Abbildung gibt eine lokale Parametrisierung einer Fläche $\{z = u(x,y) : u(x,y) \in \Omega\}$ und $J(u)$ beschreibt den Flächeninhalt. Insbesondere gilt

$$J(u) = J(u \circ \sigma) \text{ für alle } \sigma : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega} \text{ glatter Diffeomorphismus.}$$

Euler-Lagrange Gleichungssystem:

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} \left[ (\partial_{p_j^i} F)(Du) \right] = 0 \text{ für alle } i \in \{1,2,3\}\,.$$

Noether Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \left[ \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} [(D_{p_j^i} F)(Du)] \right] \partial_x u^i(y) = 0\,, \\ \sum_{i=1}^{3} \left[ \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} [(D_{p_j^i} F)(Du)] \right] \partial_y u^i(y) = 0\,. \end{aligned}$$

D.h. der Vektor $\left[\sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}[(D_{p_j^i} F)(Du)]\right]_{i=1}^{3}$ ist parallel zu $u_x \times u_y$. D.h. es existiert eine Funktion $f$, so dass

$$\left[\sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}[(D_{p_j^i} F)(Du)]\right]_{i=1}^{3} = f(Du, D^2u)u_x \times u_y \,,$$

und das Euler-Lagrange Gleichungssystem (3 Gleichungen) ist äquivalent zu der Gleichung (eine!!)

$$f(Du, D^2u) = 0.$$

## 2.6 Variationsproblemen mit Nebenbedingungen

Wir zeigen nun das Lagrange-Multiplikatoren Theorem für Variationsprobleme mit den sogenannten 'Isoperimetrischen Nebenbedingungen', d.h. wir betrachten folgendes Problem.

**Problem** Finde lokale Extrema $u \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ von

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx\,,$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathcal{G}(u) := \int_\Omega G(x, u(x), Du(x))\, dx \equiv \text{konstant}\,,$$

unter folgenden Annahmen:

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein beschränktes Gebiet;
2. $F, G \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm})$;
3. $U$ ist eine Teilmenge von $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, so dass für alle $u \in U$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$u + t\varphi \in U \text{ für alle } |t| < \varepsilon\,.$$

**Satz 2.6.1.** *Sei $u \in U$ und $c \in \mathbb{R}$, so dass $\mathcal{G}(u) = c$ und ein $\delta > 0$ existiert, so dass $J(u) \le J(v)$ gilt, für alle $v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ mit $\|u - v\|_{C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)} \le \delta$ und $\mathcal{G}(v) = c$. Weiterhin existiere ein $\psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, so dass $\delta G(u)(\psi) \ne 0$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, genannt* ***Lagrange Multiplikator****, so dass*

$$\delta J(u)(\varphi) + \lambda \delta \mathcal{G}(u)(\varphi) = 0 \textit{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\,.$$

*Falls $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$, dann gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$*

$$\begin{aligned} 0 = D_x &\left[(D_pF)(x, u(x), Du(x)) + \lambda (D_pG)(x, u(x), Du(x))\right] \\ &- \left[(D_zF)(x, u(x), Du(x)) + \lambda (D_zG)(x, u(x), Du(x))\right]\,. \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus den Annahmen und der Linearität von $\delta\mathcal{G}(u)(\cdot)$ folgt die Existenz von $\bar{\psi} \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ so dass $\delta\mathcal{G}(u)(\bar{\psi}) = 1$. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ betrachte

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon,t) &:= J(u+\varepsilon\varphi+t\bar{\psi}) \text{ und}\\ \Gamma(\varepsilon,t) &:= \mathcal{G}(u+\varepsilon\varphi+t\bar{\psi})\,.\end{aligned}$$

Dann gilt $\Gamma(0,0) = \mathcal{G}(u) = c$ und $\partial_t\Gamma(0,0) = \delta\mathcal{G}(u)(\bar{\psi}) = 1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine $C^2$-Funktion $\tau(s)$, $s \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, so dass

$$\Gamma(s,\tau(s)) = c \text{ für alle } s \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \text{ und } \tau(0) = 0\,.$$

Die Ableitung von $\tau$ in 0 ist gegeben durch

$$\frac{d}{ds}\tau(s)\bigg|_{s=0} = -\frac{\partial_\varepsilon\Gamma(0,0)}{\partial_t\Gamma(0,0)} = -\delta\mathcal{G}(u)(\varphi).$$

Wegen der Minimaleigenschaft von $u$ gilt nun

$$\Phi(0,0) \leq \Phi(s,\tau(s)) \text{ für alle } s \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\,,$$

da $\Gamma(s,\tau(s)) = c$ für alle $s \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$. Dann

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds}\Phi(s,\tau(s))\bigg|_{s=0}\\ &= \partial_\varepsilon\Phi(0,0) + \partial_t\Phi(0,0)\frac{d}{ds}\tau(0)\\ &= \delta J(u)(\varphi) + \delta J(u)(\bar{\psi})(-\delta\mathcal{G}(u)(\varphi))\,.\end{aligned}$$

Mit $\lambda := -\delta J(u)(\bar{\psi})$ folgt die erste Behauptung.

Die zweite Aussage folgt mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 2.2.7. $\square$

**Bemerkung 2.6.2.** *1. Die Annahme "existiere ein $\psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, so dass $\delta G(u)(\psi) \neq 0$" versichert uns, dass es von $u$ eine Richtung gibt, längs welcher wir uns auf der Höhe $c$ bewegen können.*

*2. An Stelle von einer einzigen Bedingung kann man auch endlich viele Bedingungen stellen.*

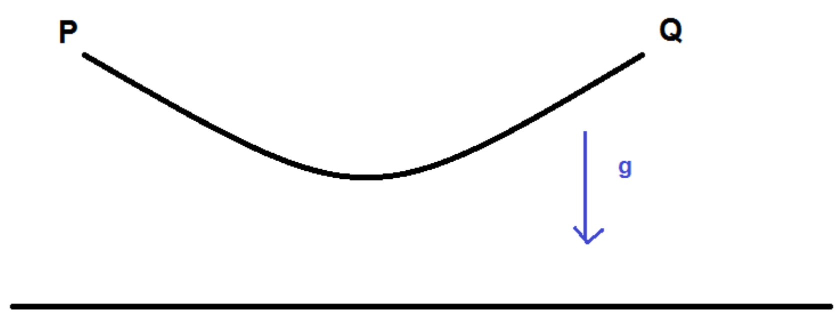
3. *Es gibt auch andere Nebenbedingungen (siehe Giaquinta, Hildebrandt, Calculus of Variations 1):*

   (a) *Holonome Nebenbedingungen:* $G(x, v(x)) = 0$ *für alle* $x \in \overline{\Omega}$. *Z.B.* $|v(x)|^2 = 1$ *für alle* $x \in \overline{\Omega}$, *d.h. der Graph von* $u$ *liegt in der Nullniveaumenge einer Funktion* $G$.

   (b) *Nicht holonome Nebenbedingungen:* $G(x, v(x), v'(x)) = 0$ *für alle* $x \in \overline{\Omega}$, *d.h. die Variablen sollen einer Differentialgleichung genügen.*

   *In diesen Fällen sind die Lagrange-Multiplikatoren Funktionen.*

**Klassisches Beispiel: Die hängende Kette**
Galileo, 1638: Welche Form nimmt eine Kette an, wenn man sie an ihren Enden aufhängt?




Beschreiben wir die Kette durch den Graph einer Funktion. Dann ist die Energie der Kette

$$J(u) = \int_a^b u(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx\,.$$

Um das Problem zu lösen, suchen wir einen Minimierer in der Klasse

$$X := \{u \in C^1([a,b]) : (a, u(a)) = P,\ (b, u(b)) = Q \text{ und } \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} dx = c\}\,,$$

mit $c > \|P-Q\|_2$. Hier ist

$$\mathcal{L}(u) := \int_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}dx\,,$$

die Länge der Kurve.

Also

$$F(x,z,p) = z\sqrt{1+p^2}, \quad G(x,z,p) = \sqrt{1+p^2} \text{ und } F,G \in C^2\,.$$

**Erster Schritt:** Zeige, dass $\psi \in C_0^\infty([a,b])$ existiert mit $\delta\mathcal{G}(u)(\psi) \neq 0$.

Es gilt für $\psi \in C_0^\infty([a,b])$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G}(u)(\psi) &= \int_a^b \frac{u'(x)\psi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\,dx \qquad \text{und falls } u \in C^2([0,1])\\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right)\psi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Angenommen, dass

$$\delta\mathcal{G}(u)(\psi) = 0 \text{ für alle } \psi \in C_0^\infty([a,b])\,,$$

dann folgt aus Satz 2.2.6 (Hauptlemma der Variationsrechnung)

$$\begin{aligned} & \tfrac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} && \equiv \text{ konstant} \equiv d \in \mathbb{R}\,,\\ \Rightarrow\quad & (u'(x))^2 && = d^2(1+(u'(x))^2)\\ \Leftrightarrow\quad & (1-d^2)(u'(x))^2 && = 1\,.\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in $X$, da $c > \|P-Q\|_2$ und somit keine lineare Funktion in $X$ enthalten ist.

Somit gibt es $\psi \in C_0^\infty([a,b])$ mit $\delta\mathcal{G}(u)(\psi) \neq 0$.

**Zweiter Schritt:** Existenz des Minimums.

Falls $u$ Minimum, existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty([a,b];\mathbb{R})$

$$\delta J(u)(\varphi) + \lambda\delta\mathcal{G}(u)(\varphi) = 0\,.$$

Explizit geschrieben:

$$\int_a^b \left[\varphi(x)\sqrt{1+(u'(x))^2} + u(x)\frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right]\,dx + \lambda\int_a^b \frac{u'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\,dx = 0\,.$$

Falls $u \in C^2([a,b])$, gilt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\sqrt{1+(u'(x))^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{u'(x)(u(x)+\lambda)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right] = 0\,.$$

Es ist nun günstig, die Funktion $\tilde{u}(x) := u(x)+\lambda$ zu betrachten. Wir erreichen dann

$$\sqrt{1+(\tilde{u}'(x))^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\tilde{u}'(x)\tilde{u}(x)}{\sqrt{1+(\tilde{u}'(x))^2}}\right] = 0\,.$$

Dies ist die Gleichung, die wir in dem Beispiel Rotationssymmetrische Minimalfläche gelöst haben! Die allgemeine Lösung ist

$$u(x) = \alpha\cosh\left(\frac{x}{\alpha}+\beta\right)+\lambda\,.$$

Die Parameter $\alpha, \beta$ und $\lambda$ können durch die Randwerte und die Nebenbedingung bestimmt werden.

Exemplarisch lösen wir folgende Situation: $P = (-1, r)$, $Q = (1, r)$, $c = 3$. Aus $u(-1) = u(1)$ folgt:

$$\cosh\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right) = \cosh\left(-\frac{1}{\alpha}+\beta\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\beta = -(-\frac{1}{\alpha}+\beta) \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Aus der Nebenbedingung folgt

$$\begin{aligned} 3 &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+u'(x)^2}dx = \int_{-1}^{1}\cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx = 2\alpha\sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} &= \frac{\sinh(\alpha^{-1})}{\alpha^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat eine eindeutige Lösung $\bar{\alpha}$ da $\frac{3}{2} \geq 1$ und die Funktion $x \mapsto \sinh(x)/x$ streng monoton wachsend ist. Der Parameter $\lambda$ ist nun bestimmt durch die Randbedingung

$$\bar{\alpha}\cosh\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)+\lambda = r\,.$$

Man hat

$$\lambda = r - \frac{\cosh(\bar{\alpha}^{-1})}{\bar{\alpha}^{-1}} \qquad \text{und} \qquad u(x) = \bar{\alpha}\cosh\left(\frac{x}{\bar{\alpha}}\right) + r - \bar{\alpha}\cosh\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)\,.$$