

Kapitel 3

Direkte Methoden

Sei X ein Banachraum und $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **Minimalfolge**, d.h. so dass

$$J(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in X} J(u).$$

Was hätten wir nun gerne?

1. Es existiert $u \in X$ und eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ so dass $u_{n_k} \rightarrow u$;
2. J ist unterhalbstetig, d.h.

$$J(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}).$$

Um zu verstehen wann wir diesen Weg folgen können, müssen wir zuerst geeignete Banachräume studieren.

3.1 L^p -Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 3.1.1. Sei $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$.

1. $L^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (Lebesgue-)messbar und } \|u\|_p < \infty\}$ wobei

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } p \in [1, \infty)$$

$$\text{und } \|u\|_{\infty} := \inf\{\alpha : |u(x)| \leq \alpha \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

$$= \text{esssup}\{|u(x)| : x \in \Omega\} \text{ (wesentliche Supremum),}$$

und $u = v$ in $L^p(\Omega)$ genau dann, wenn $u(x) = v(x)$ f.ü. in Ω .

2. $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (Lebesgue-)messbar und } u \in L^p(\Omega') \text{ für alle offene Mengen } \Omega' \text{ mit } \overline{\Omega'} \subset \Omega\}$.

Nun nennen wir einige Resultate, die nützlich sein werden. Diese Resultate werden in der Maßtheorie oder der Funktionalanalysis bewiesen.

Satz 3.1.2. Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt

1. $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum, d.h. jede Cauchy-Folge ist konvergent;
2. Hölder Ungleichung: Seien $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^{p'}(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann $uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

3. Falls $1 \leq p < \infty$ kann das Dualraum $(L^p(\Omega))^* = \{\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear und beschränkt}\}$ mit $L^{p'}(\Omega)$ identifiziert werden. D.h. zu $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ beliebig, gibt es genau ein $u \in L^{p'}(\Omega)$ so dass

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} u(x)f(x) dx \text{ für alle } f \in L^p(\Omega).$$

4. $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$, d.h. zu jedem $u \in L^p(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u_m - u\|_p \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. (Falsch für $p = \infty$!)

Bemerkung 3.1.3. Lineare Abbildungen auf unendlich-dimensionalen Räumen müssen nicht stetig sein. Deswegen fordern wir in der Definition des Dualraums, dass die linearen Abbildungen linear und beschränkt sind. Man kann zeigen, dass für lineare Funktionale, Stetigkeit zur Beschränktheit äquivalent ist.

FRAGE: Beschränkte Folge impliziert konvergente Teilfolge? Kompaktheit?
Verschiedene Konvergenzbegriffe:

Definition 3.1.4. Sei $p \in [1, \infty)$ und $u \in L^p(\Omega)$, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$.

1. Die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **(stark) konvergent** gegen u falls

$$\|u - u_k\|_p \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

In Zeichen: $u_k \rightarrow u$ (in $L^p(\Omega)$).

2. Die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **schwach konvergent** gegen u falls für alle $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$:

$$\varphi(u_k) \longrightarrow \varphi(u), \quad k \rightarrow \infty.$$

In Zeichen: $u_k \rightharpoonup u$ (in $L^p(\Omega)$).

Bemerkung 3.1.5. 1. Der Limes (schwach oder stark) ist eindeutig.

2. Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz, da für alle $\varphi \in (L^p(\Omega))^* = \{\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \text{linear und beschränkt}\}$:

$$|\varphi(u_k) - \varphi(u)| = |\varphi(u_k - u)| \leq C(\varphi) \|u_k - u\|_p.$$

Beispiel: Sei $\Omega = (0, 2\pi)$ und $u_k(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $p \in (1, \infty)$:

1. Die Folge u_k konvergiert schwach gegen 0 in $L^p(\Omega)$.
2. Die Folge u_k konvergiert nicht gegen 0 in $L^p(\Omega)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die zweite Aussage.

2. Wir haben

$$\begin{aligned} \|u_k\|_p^p &= \int_0^{2\pi} |\sin(kx)|^p dx \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{2k\pi} |\sin(y)|^p dy \quad (\text{wegen Periodizität}) \\ &= \int_0^{2\pi} |\sin(y)|^p dy = \text{konstant} =: A^p > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

1. Sei $\varphi \in C_0^\infty(0, 2\pi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_k(x) \varphi(x) dx &= \int_0^{2\pi} \sin(kx) \varphi(x) dx \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= -\frac{1}{k} \cos(kx) \varphi(x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Da $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$ sehen wir dass

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} u_k(x)\varphi(x) dx - 0 \right| &\leq \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} |\cos(kx)| |\varphi'(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} |\varphi'(x)| dx \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert $v \in L^{p'}(\Omega)$ so dass

$$\varphi(w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx \text{ für alle } w \in L^p(\Omega).$$

Aus Satz 3.1.2(4.) folgt die Existenz einer Folge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ so dass $\|v - v_m\|_{p'} \rightarrow 0$. Dann existiert $M \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|v - v_M\|_{p'} < \frac{1}{2}A^{-1}\varepsilon,$$

wobei $A := \|u_k\|_p$ (unabhängig von k wegen (3.1)). Dann

$$\begin{aligned} |\varphi(u_k) - 0| &= \left| \int_0^{2\pi} v(x)u_k(x)dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} (v(x) - v_M(x) + v_M(x))u_k(x)dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi} (v(x) - v_M(x))u_k(x)dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} v_M(x)u_k(x)dx \right|. \end{aligned}$$

Wir haben vorher gesehen dass die zweite Term auf der Rechte Seite gegen Null konvergiert für $k \rightarrow \infty$, da $v_M \in C_0^\infty(\Omega)$. Somit folgt mit der Hölderschen Ungleichung für k groß genug

$$|\varphi(u_k) - 0| \leq \|v - v_M\|_{p'} \|u_k\|_p + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \frac{1}{2}(A)^{-1}\varepsilon A + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Da ε und $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ beliebig sind, haben wir gezeigt dass die Folge u_k schwach gegen 0 in $L^p(\Omega)$ konvergiert. \square

Satz 3.1.6. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt*

1. *Sei $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$. Dann ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ beschränkt und es gilt*

$$\|u\|_p \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_p.$$

Im Worten: die L^p -Norm ist unterhalbstetig bzgl. der schwachen Konvergenz.

2. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine beschränkte Folge, d.h. es existiert ein $C > 0$ so dass $\|u_n\|_p \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $u \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ so dass $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$.
3. Sei $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$, dann gibt es eine Teilfolge $(u_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $h \in L^p(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} u_{m_j}(x) &\rightarrow u(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega, \\ |u_{m_j}(x)| &\leq h(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.7. Allgemeiner: Teil 2. der Aussage gilt in **reflexiven** Banachräumen.

Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen In $L^p(\Omega)$ besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Gibt es Kriterien um zu verstehen wann eine Folge stetige Funktionen eine konvergente Teilfolge besitzt? Ja. Der Satz von Arzela-Ascoli.

Satz 3.1.8 (Satz von Arzela-Ascoli). Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Betrachte

$$C(K; \mathbb{R}) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit Norm } \|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C(K; \mathbb{R})$ mit

1. $\|u_k\|_\infty \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (gleichmäßig beschränkt);
2. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass

$$|u_k(t) - u_k(\tau)| < \varepsilon \quad \forall t, \tau \in K \text{ mit } d(t, \tau) < \delta \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

(gleichmäßig gleichgradig stetig).

Dann gibt es eine Teilfolge $(u_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ und eine Funktion $u \in C(K; \mathbb{R})$ mit

$$\|u_{k_m} - u\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

3.2 Das Dirichlet Funktional, Teil 1

Betrachte das Variationsproblem

$$D(u) = \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \longrightarrow \min!$$

auf $X := \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = \alpha, u(1) = \beta\}$.

Es ist klar, dass $X \neq \emptyset$. Zum Beispiel, $u^*(x) := \beta + (\alpha - \beta)(1 - x)$ ist ein Element von X . Sei nun $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Minimalfolge, d.h.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(u_m) = \inf_{u \in X} D(u) =: \gamma (\geq 0).$$

Besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge? In welchem Raum?

Seien $x, y \in [0, 1]$, $x < y$, und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_m(y)| &= \left| \int_x^y u'_m(t) dt \right| \quad (\text{Höldersche Ungleichung}) \\ &\leq \left(\int_x^y |u'_m(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x - y|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |u'_m(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x - y|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{D(u_m)} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\gamma + 1} |x - y|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

für m groß genug und somit sind die u_m 's gleichmäßig gleichgradig stetig.

Wir zeigen nun, dass Sie auch gleichmäßig beschränkt sind. In der Tat haben wir für m groß genug

$$|u_m(x)| \leq |u_m(x) - u_m(0)| + |u_m(0)| \leq |x|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\gamma + 1} + |\alpha| \leq \sqrt{\gamma + 1} + |\alpha|.$$

Der Satz von Arzela-Ascoli (Satz 3.1.8) impliziert, dass $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ und eine Teilfolge $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ existieren, so dass $\|u_{m_k} - u\|_{\infty} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Insbesondere $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ und $u \in C^{0, \frac{1}{2}}([0, 1]; \mathbb{R})$, d.h. u ist Hölderstetig mit Exponent $\frac{1}{2}$.

FRAGE: Ist $u \in X$? D.h. ist $u \in C^1([0, 1])$? Macht es Sinn, $D(u)$ zu schreiben? Falls ja, gilt $D(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} D(u_j)$?

Da $D(u_{m_k}) \leq \gamma + 1$ für k groß genug, sehen wir dass $u'_{m_k} \in L^2(0, 1)$ und $\|u'_{m_k}\|_2 \leq C$. Nach Satz 3.1.6 (2.) existiert eine Teilfolge $(u_{m_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ und $v \in L^2(0, 1)$, so dass

$$u'_{m_{k_j}} \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(0, 1),$$

d.h.

$$\int_0^1 u'_{m_{k_j}}(x)\varphi(x) dx \longrightarrow \int_0^1 v(x)\varphi(x) dx \text{ für alle } \varphi \text{ in } L^2(0,1) \supset C_0^\infty([0,1]).$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty([0,1])$. Dann gilt

$$\int_0^1 u'_{m_{k_j}}(x)\varphi(x) dx = - \int_0^1 u_{m_{k_j}}(x)\varphi'(x) dx,$$

und $\int_0^1 u_{m_{k_j}}(x)\varphi'(x) dx \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx.$

Wir haben damit gezeigt, dass $v \in L^2(0,1)$ existiert so dass

$$\int_0^1 v(x)\varphi(x) dx = - \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty([0,1]).$$

Man sagt, dass v die **schwache Ableitung** von u ist. Wir haben noch nicht gezeigt dass u 1-mal stetig differenzierbar ist. Aber wir brauchen es nicht! Wir arbeiten mit einer schwächeren Definition von Ableitung. Dies motiviert die nächste Sektion.

3.3 Sobolev Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen.

Definition 3.3.1. Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir sagen dass u **schwach differenzierbar in der i -ten Richtung** ist, falls es ein $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, so dass

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \varphi(x) dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Oft wird v_i mit $\frac{\partial}{\partial x_i} u = \partial_i u$ bezeichnet.

Allgemeiner: Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Wir sagen, dass u die **schwache Ableitung** $D^\alpha u$ besitzt, falls es ein $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt so dass

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha(x) \varphi(x) dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Hier $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Bemerkung 3.3.2. 1. Falls die (klassische) Ableitung existiert, dann stimmt sie mit der schwachen überein.

2. Die schwache Ableitung ist fast überall eindeutig. Diese Bemerkung folgt aus dem Hauptlemma der Variationsrechnung für L^1 -Funktionen.

Beispiel 1: Sei $n = 1$ und $\Omega = (0, 2)$. Betrachte die Funktionen

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \text{und } v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Beh. v ist die schwache Ableitung von u .

Begr. Sei $\varphi \in C_0^\infty(0, 2)$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= x \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(x) \Big|_1^2 - 0 \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x) dx - \varphi(1) = - \int_0^2 v(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Sei $n = 1$ und $\Omega = (0, 2)$. Betrachte die Funktionen

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Beh. u besitzt keine schwache Ableitung.

Begr. Angenommen es existiert $v \in L^1_{\text{loc}}(0, 2)$ mit

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^2 v(x)\varphi(x) dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(0, 2).$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(0, 2)$

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v(x)\varphi(x) dx &= \int_0^2 u(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi'(x) dx + \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= -(\varphi(1) - \varphi(0)) + \varphi(2) - \varphi(1) = -2\varphi(1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sei nun $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(1, 2)$ und betrachte

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \tilde{\varphi}(x) & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dann $\varphi \in C_0^\infty(0, 2)$ und aus (3.2) folgt

$$\int_1^2 v(x)\tilde{\varphi}(x) dx = 0 \text{ für alle } \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(1, 2).$$

Aus dem Hauptlemma der Variationsrechnung für Funktionen in L^1_{loc} folgt, dass $v = 0$ f.ü. in $[1, 2]$. Analog kann man zeigen, dass $v = 0$ f.ü. in $[0, 1]$. Somit folgt aus (3.2)

$$2\varphi(1) = \int_0^2 v(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(0, 2).$$

Widerspruch!

Definition 3.3.3. Sei $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Der Raum

$W^{m,p}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in L^p(\Omega), \text{ so dass } D^\alpha u \text{ existiert im schwachen Sinne für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ und } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$

ist der **Sobolev-Raum** der m -mal schwach differenzierbaren Funktionen die zur Potenz p integrierbar sind. Die Norm in $W^{m,p}$ ist definiert durch

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Satz 3.3.4. Sei $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1. $W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum;
2. $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ bzgl. der $W^{m,p}$ -Norm. D.h. für alle $u \in W^{m,p}(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, so dass

$$\|u_k - u\|_{W^{m,p}} \longrightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Beispiele (1) Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

ist Element von $W^{1,p}(0,2)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

(2) Die Funktion $u(x) = |x|$ ist Element von $W^{1,p}(-1,1)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Satz 3.3.5 (Einbettungssatz in Dimension 1, siehe [BGH], Thm.2.2). Sei $I = (a,b)$ mit $|I| < \infty$ und $m \in (1, \infty)$. Dann gilt $W^{1,m}(I) \subset C^0(\bar{I})$. D.h. für jedes $u \in W^{1,m}(I)$ gibt es einen stetigen Repräsentanten in der Äquivalenzklasse von u .

Zusätzlich gilt für alle $x_0, x_1 \in [a, b]$

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_0) &= \int_{x_0}^{x_1} u'(y) dy \quad \text{und} \\ \sup_I |u(x)| &\leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(t)| dt + \int_I |u'(t)| dt. \end{aligned}$$

Satz 3.3.6 (Poincaré Ungleichung). Sei $p \in (1, \infty)$, $I = (a,b)$, $x_0 \in [a, b]$ und $u \in W^{1,p}(I)$. Dann gilt

$$\int_a^b |u(x) - u(x_0)|^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b |u'(x)|^p dx.$$

Insbesondere,

$$\int_a^b |u(x) - \bar{u}_I|^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b |u'(x)|^p dx,$$

wobei $\bar{u}_I = \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx$.

Beweis. Nach Satz 3.3.5 gilt

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x u'(y) dy \text{ und somit } |u(x) - u(x_0)|^p \leq \left(\int_I |u'(y)| dy \right)^p.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x) - u(x_0)|^p dx &\leq |b-a| \left(\int_a^b |u'(y)| dy \right)^p \\ &\quad \text{(Hölder-Ungleichung mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1) \\ &\leq |b-a| \left(\int_a^b |u'(y)|^p dy \right) (|b-a|)^{\frac{p}{p'}} \\ &= |b-a|^p \int_a^b |u'(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit dem Mittelwertsatz. \square

Satz 3.3.7. Sei $I = (a, b)$, $1 < p < \infty$, und $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I)$ mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$. Dann existiert eine Teilfolge u_{k_j} und eine Funktion $u \in W^{1,p}(I)$ mit

$$\begin{aligned} u_{k_j} &\rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(I) \\ \text{d.h. } u_{k_j} &\rightharpoonup u \text{ in } L^p(I) \text{ und } u'_{k_j} \rightharpoonup u' \text{ in } L^p(I). \end{aligned}$$

Beweis. Aus $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$ folgt $\|u_k\|_{L^p} \leq C$. Satz 3.1.6(2) impliziert, dass eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $u \in L^p(\Omega)$ existieren mit

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } L^p(I).$$

Ebenso, aus $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$ folgt $\|u'_{k_j}\|_{L^p} \leq C$. Satz 3.1.6(2) impliziert, dass eine Teilfolge $(u'_{k_{j_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ und $v \in L^p(\Omega)$ existieren mit

$$u'_{k_{j_m}} \rightharpoonup v \text{ in } L^p(I).$$

Zu zeigen: $u' = v$ im schwachen Sinne.

Wir haben für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$

$$\begin{aligned}\int_I u(x)\varphi'(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I u_{k_{j_m}}(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I u'_{k_{j_m}}(x)\varphi(x) dx = - \int_I v(x)\varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

3.4 Das Dirichlet Funktional (Teil II)

Sei $I = (a, b)$ ein beschränktes Intervall. Nun betrachten wir das Funktional

$$D(u) = \int_I |u'(x)|^2 dx \longrightarrow \min!$$

auf $\tilde{X} := \{u \in W^{1,2}(I) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \supset C^1(\bar{I})$. Die Randwerte von $u \in W^{1,2}(I)$ sind eindeutig bestimmt wegen dem Einbettungssatz 3.3.5.

Schritt 1: Schwache Kompaktheit von Minimalfolgen.

Zuerst merken wir, dass $\tilde{X} \neq \emptyset$ und dass das Funktional D wohldefiniert ist auf \tilde{X} . Sei u^* eine feste Funktion in \tilde{X} . Dann gilt

$$0 \leq \inf_{u \in \tilde{X}} D(u) \leq D(u^*).$$

Sei nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h. $u_k \in \tilde{X}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$D(u_k) \rightarrow \inf_{u \in \tilde{X}} D(u).$$

Dann existiert $\gamma > 0$ so dass

$$\int_I |u'_k(x)|^2 dx = \|u'_k\|_2 \leq \gamma \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Die L^2 -Norm von der Minimalfolge ist auch gleichmäßig beschränkt. Aus

$$|u_k(x)|^2 \leq (|u_k(x) - u_k(0)| + |u_k(0)|)^2 \leq 2|u_k(x) - \alpha|^2 + 2\alpha^2$$

folgt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit der Poincarè Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_I |u_k(x)|^2 dx &\leq 2 \int_I |u_k(x) - \alpha|^2 dx + 2\alpha^2 |I| \\ &\leq 2|I|^2 \int_I |u'_k(x)|^2 dx + 2\alpha^2 |I| \leq 2|I|^2 \gamma + 2\alpha^2 |I| < \infty. \end{aligned}$$

Somit existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $\|u_k\|_{W^{1,2}} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und nach Satz 3.3.7 existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $u \in W^{1,2}(I)$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(I)$, d.h.

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } L^2(I) \text{ und } u'_{k_j} \rightharpoonup u' \text{ in } L^2(I).$$

Schritt 2: Der Grenzwert ist Element des Definitionsbereichs des Funktionals, d.h. $u \in \tilde{X}$.

Wir wissen schon dass $u \in W^{1,2}(I)$. Es bleibt zu zeigen, dass $u(a) = \alpha$ und $u(b) = \beta$. Wir brauchen Informationen bzgl. der punktweisen Konvergenz der Folge. Wegen dem Einbettungssatz 3.3.5 gilt

$$\begin{aligned} \|u_{k_j}\|_{C^0([a,b])} &\leq \frac{1}{|I|} \int_I |u_{k_j}(x)| dx + \int_I |u'_{k_j}(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{|I|}} \left(\int_I |u_{k_j}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{|I|} \left(\int_I |u'_{k_j}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(I) \|u_{k_j}\|_{W^{1,2}} \leq \tilde{C}, \end{aligned}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Die Folge ist gleichmäßig beschränkt. Wir zeigen nun dass die Folge auch gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Wegen dem Einbettungssatz 3.3.5 gilt auch

$$\begin{aligned} |u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)| &\leq \left| \int_y^x u'_{k_j}(t) dt \right| \quad (y < x) \\ &\leq \left(\int_y^x |u'_{k_j}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\gamma} |x - y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Alle Annahmen im Satz von Arzela-Ascoli (Satz 3.1.8) sind erfüllt. Somit existieren eine Teilfolge $(u_{k_{j_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ und eine Funktion $v \in C^0([a, b])$ so dass

$$\|u_{k_{j_m}} - v\|_{\infty} \longrightarrow 0.$$

Es folgt direkt dass $v(a) = \alpha$ und $v(b) = \beta$.

Es bleibt zu zeigen, dass $v \equiv u$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt für alle $\varphi \in C_0^{\infty}(I)$

$$\int_I u_{k_{j_m}}(x) \varphi(x) dx \longrightarrow \int_I v(x) \varphi(x) dx.$$

Andererseits gilt wegen der schwachen Konvergenz in $L^2(I)$

$$\int_I u_{k_{j_m}}(x) \varphi(x) dx \longrightarrow \int_I u(x) \varphi(x) dx.$$

Dann

$$\int_I (u(x) - v(x)) \varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^{\infty}(I).$$

Da u und v stetig sind, folgt daraus $v \equiv u$.

Schritt 3: u ist ein Minimierer.

Im Allgemeinen, gilt nicht $D(u_{k_j}) \rightarrow D(u)$ für $j \rightarrow \infty$. Man hat schwache Unterhalbstetigkeit (d.h. Unterhalbstetigkeit bzgl. der schwachen Konvergenz):

$$v_k \rightharpoonup v \text{ in } W^{1,2}(I) \text{ impliziert } D(v) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} D(v_k).$$

In der Tat

$$\begin{aligned} 0 \leq D(v_k - v) &= \frac{1}{2} \int_I |v'(x) - v'_k(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_I |v'(x)|^2 dx - \int_I v'(x)v'_k(x) dx + \frac{1}{2} \int_I |v'_k(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\frac{1}{2} \int_I |v'(x)|^2 dx + \int_I v'(x)v'_k(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_I |v'_k(x)|^2 dx$$

und mit Limes $k \rightarrow \infty$, da $v'_k \rightharpoonup v$ in L^2

$$\frac{1}{2} \int_I |v'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_I |v'_k(x)|^2 dx.$$

In unserer Situation ergibt sich

$$D(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} D(u_k) = \inf_{v \in \tilde{X}} D(v),$$

$\Rightarrow u$ ist ein Minimierer!

3.5 Das Allgemeine Resultat

Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Auf X^* betrachten wir folgende Norm (die **Operatornorm**): für $\varphi \in X^*$

$$\|\varphi\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}.$$

Betrachte nun X^{**} , das Dualraum von X^* , das **Bidual von X** , wobei

$$X^{**} := \{\psi : X^* \rightarrow \mathbb{R} : \text{mit } \psi \text{ linear und beschränkt}\}.$$

Man kann eine natürliche Abbildung von X nach X^{**} definieren. Betrachte:

$$J : X \rightarrow X^{**}, \quad X \ni u \mapsto J(u) : X^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3)$$

$$J(u)(\varphi) = \varphi(u) \text{ für alle } \varphi \in X^*.$$

Die Abbildung ist wohldefiniert da $J(u)$ linear ist und die Beschränktheit folgt aus folgender Rechnung

$$|J(u)(\varphi)| = |\varphi(u)| \leq \|\varphi\| \|u\|.$$

Man kann zeigen dass die Abbildung J injektiv ist. Ist sie surjektiv? I.A. nicht.

Definition 3.5.1. Ein Banachraum X heißt **reflexiv**, falls $J(X) = X^{**}$ für J definiert wie in (3.3).

Beispiele von reflexiven Räumen sind die L^p -Räume für $p \in (1, \infty)$ und die Sobolev Räume $W^{k,p}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$.

Wieso sind reflexive Räume sehr wichtig?

Satz 3.5.2. Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einen reflexiven Banachraum X besitzt eine schwache konvergente Teilfolge.

Dieses Resultat gibt uns somit ein Kompaktheits Resultat. Was wir noch brauchen ist das Verhalten des Funktional bzgl. schwacher Konvergenz zu verstehen.

Definition 3.5.3. Ein Funktional $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **schwach unterhalbstetig** in X , falls

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u),$$

für alle $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X .

Was wir mit dem Dirichlet-Funktional gemacht haben können wir nun in folgendem allgemeinen Rahmen beweisen.

Satz 3.5.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schwach unterhalbstetig. Sei J **koerzitiv**, d.h. es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$J(u) \geq \alpha \|u\|_X + \beta \text{ für alle } u \in X.$$

Falls ein $\tilde{u} \in X$ mit $J(\tilde{u}) < \infty$ existiert, dann existiert $\bar{u} \in X$ mit

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in X} J(u).$$

Beweis. Wegen der Annahmen gilt

$$\inf_{u \in X} J(u) = \gamma \in \mathbb{R}.$$

Sei $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Minimalfolge. Dann existiert $C > 0$ so dass $J(u_k) \leq C$ für alle k groß genug. Aus der Koerzitivität folgt

$$|\beta| + C \geq \alpha \|u_k\|_X \text{ für alle } k \text{ groß genug.}$$

Die Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt in X . Da X reflexiv ist, existieren eine Teilfolge $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ und $\bar{u} \in X$, so dass $u_{k_j} \rightharpoonup \bar{u}$ in X . Da J schwach unterhalbstetig ist, gilt

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_{k_j}) = \inf_{u \in X} J(u).$$

□

3.6 Schwache Unterhalbstetigkeit

In der Anwendung der direkten Methoden spielt die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals eine entscheidende Rolle. Wann ist dies zu erwarten? Hier betrachten wir den ein-dimensionalen Fall.

Im Folgenden sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $m \in (1, \infty)$ und $F(x, z, p) \in C^0(I, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Betrachte

$$J(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x)) \, dx.$$

Ist J wohldefiniert auf $W^{1,m}(I)$?

Lemma 3.6.1. *Die Funktion $F(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$ ist messbar für alle $u \in W^{1,m}(I)$.*

Beweis. Da $x \mapsto \Phi(x) := (x, u(x), u'(x))$ ist eine Messbare Funktion (da u, u' messbar und $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+2N}$ ist messbar genau dann, wenn alle Komponenten messbar sind) und dann $F \circ \Phi$ ist messbar als Verkettung von einer stetigen und einer messbaren Funktion. Hier benutzen wir das, nach Definition, Urbilder von offenen Mengen durch stetige Funktionen wieder offen sind. \square

Man könnte die Stetigkeitsannahmen an F schwächen. Dazu siehe das folgende Resultat:

Lemma *Sei $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $x \mapsto F(x, y)$ ist messbar für alle $y \in \mathbb{R}^k$ und $y \mapsto F(x, y)$ ist stetig für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$. Sei $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ messbar, dann ist die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(x, u(x))$ messbar.*

Beweis. Da u messbar, existiert eine Folge von Treppenfunktionen

$$t_j \longrightarrow u \text{ f.ü. in } \mathbb{R}^m,$$

wobei für alle $j \in \mathbb{N}$

$$t_j(x) = \sum_{i=1}^{l_j} \mu_i^j \chi_{A_i^j}(x),$$

mit $\mu_i^j \in \mathbb{R}^k$ und $A_i^j \subset \mathbb{R}^m$ messbar. Nun für $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & (F(\cdot, t_j(\cdot)))^{-1}(r, \infty) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m : F(x, t_j(x)) > r\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{l_j} \left(\{x \in \mathbb{R}^m : F(x, \mu_i^j) > r\} \cap A_i^j \right) \cup \{x \in \mathbb{R}^m : F(x, 0) > r\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist A_j^i messbar. Da $x \mapsto F(x, y)$ messbar für alle $y \in \mathbb{R}^k$

$$\{x \in \mathbb{R}^m : F(x, \mu_j^i) > r\} \text{ und } \{x \in \mathbb{R}^m : F(x, 0) > r\},$$

sind messbar. Es folgt, dass $(F(\cdot, t_j(\cdot)))^{-1}(r, \infty)$ messbar für alle $j \in \mathbb{N}$ ist und, da r beliebig, dass $(F(\cdot, t_j(\cdot)))$ eine messbare Funktion ist.

Da $y \mapsto F(x, y)$ stetig für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$,

$$F(x, t_j(x)) \longrightarrow F(x, u(x)) \text{ f. ü. in } \mathbb{R}^m.$$

Die Behauptung folgt, da $F(x, u(x))$ messbar ist als punktweise Limes von messbaren Funktionen. \square

Wir haben damit erreicht

Proposition 3.6.2. *Falls eine Funktion $g \in L^1(I)$ existiert so dass*

$$F(x, z, p) \geq g(x) \text{ für alle } (z, p) \in \mathbb{R}^{2N},$$

dann ist das Funktional

$$J(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx,$$

wohldefiniert auf $W^{1,m}(I)$, $m \in (1, \infty)$. Weiter gilt $J(u) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für alle $u \in W^{1,m}(I)$ und es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ so dass

$$\inf\{J(u) : u \in W^{1,m}(I)\} \geq C.$$

Beweis. Aus Lemma 3.6.1 folgt die Integrierbarkeit von $F(x, u(x), u'(x))$ für alle $u \in W^{1,m}(I)$ und der Rest der Behauptung folgt mit $C = -\|g\|_{L^1}$. \square

Wann ist J schwach unterhalbstetig? Wir geben erst eine notwendige Bedingung.

Satz 3.6.3 (Notwendige Bedingung für schwache Unterhalbstetigkeit). *Sei J schwach unterhalbstetig auf $W^{1,m}(I)$ für ein $m \in (1, \infty)$. D.h.*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u) \text{ für alle } (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,m}(I) \text{ mit } u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(I).$$

Dann gilt

$$\int_I F(x_0, z_0, p_0 + \varphi'(x)) dx \geq |I|F(x_0, z_0, p_0) \quad (3.4)$$

für alle $(x_0, z_0, p_0) \in I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und $\varphi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}^N)$.

Bemerkung 3.6.4. Funktionen, die (3.4) genügen, heißen **quasikonvex** in p . In Dimension 1 kann man zeigen, dass F genau dann konvex in p ist, wenn F quasikonvex in p ist. In Dimension größer als 1 gilt nur die Implikation: F konvex in p impliziert F quasikonvex in p .

Beweis. Ohne Einschränkung: $I = (0, 1)$.

Spezialfall: $F = F(p)$.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}^N)$ und $\tilde{\varphi}$ ihre periodische Fortsetzung (mit Periode 1) so dass $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$. Definiere $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\tilde{\varphi}(nx)$. Dann $\varphi'_n(x) = \tilde{\varphi}'(nx)$ und $\|\varphi'_n\|_\infty \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei

$$u_0(x) := p_0x \text{ und } u_n(x) := u_0(x) + \varphi_n(x) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in [0, 1].$$

Dann

$$|u_n(x) - u_0(x)| = |\varphi_n(x)| = \frac{1}{n}|\tilde{\varphi}(nx)| \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und somit konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen u_0 in $[0, 1]$.

Da

$$|u'_n(x)| \leq |u'_0(x)| + |\varphi'_n(x)| \leq |p_0| + C,$$

folgt dass die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist in $W^{1,m}(I)$ für jedes $m \in (1, \infty)$. Nach Satz 3.3.7 existieren eine Teilfolge $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $\tilde{u} \in W^{1,m}(I)$, so dass

$$u_{n_j} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ in } W^{1,m}(I).$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen u_0 folgt, dass $\tilde{u} = u_0$ fast überall in $[0, 1]$.

Da J schwach unterhalbstetig ist gilt

$$J(u_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j}).$$

Nun

$$J(u_0) = \int_I F(u'_0(x)) \, dx = \int_I F(p_0) \, dx = |I|F(p_0),$$

während

$$\begin{aligned}
J(u_{m_j}) &= \int_I F(u'_0(x) + \varphi'_{m_j}(x)) \, dx \\
&= \int_I F(p_0 + \tilde{\varphi}'(m_j x)) \, dx \\
&= \frac{1}{m_j} \int_0^{m_j} F(p_0 + \tilde{\varphi}'(z)) \, dz \quad (\text{wegen Periodizität}) \\
&= \int_0^1 F(p_0 + \tilde{\varphi}'(z)) \, dz = \int_0^1 F(p_0 + \varphi'(z)) \, dz.
\end{aligned}$$

Somit

$$|I|F(p_0) \leq \int_0^1 F(p_0 + \tilde{\varphi}'(z)) \, dz,$$

und wir haben (3.4) im Spezialfall $F = F(p)$ bewiesen.

Allgemeiner Fall: Sei $x_0 \in I$ und $R_h := (x_0, x_0 + h)$ mit $h > 0$ klein genug so dass $R_h \subset I$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}^N)$ und $\tilde{\varphi}$ die periodische Fortsetzung mit Periode 1. Sei

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{h}{n} \tilde{\varphi}\left(\frac{n}{h}(x - x_0)\right) & \text{falls } x \in R_h; \\ 0 & \text{falls } x \notin R_h, \end{cases}$$

und

$$u_0(x) := z_0 + p_0(x - x_0), \quad u_n(x) = u_0(x) + \varphi_n(x) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in [0, 1].$$

Dann konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen u_0 in $[0, 1]$. Weiter, da

$$|u'_n(x)| \leq |p_0| + |\tilde{\varphi}'\left(\frac{n}{h}(x - x_0)\right)| \leq C \text{ in } [0, 1],$$

ist die Folge gleichmäßig beschränkt in $W^{1,m}(I)$ und, wie vorher, existiert eine Teilfolge $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ so dass

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0 \text{ in } W^{1,m}(I).$$

Betrachte nun

$$J_{R_h}(u_{n_j}) := \int_{R_h} F(x, u_{n_j}(x), u'_{n_j}(x)) \, dx.$$

Zwischenbehauptung: Es gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J_{R_h}(u_{n_j}) = \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) \, dt \, dx.$$

Angenommen wir haben die Zwischenbehauptung gezeigt, dann gilt

$$\begin{aligned} J(u_{n_j}) &= \int_{I \setminus R_h} F(x, u_{n_j}(x), u'_{n_j}(x)) \, dx + \int_{R_h} F(x, u_{n_j}(x), u'_{n_j}(x)) \, dx \\ &= \int_{I \setminus R_h} F(x, u_0(x), u'_0(x)) \, dx + J_{R_h}(u_{n_j}), \end{aligned}$$

da $u = u_0$ auf $I \setminus R_h$. Aus $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$ in $W^{1,m}(I)$ folgt

$$\begin{aligned} J(u_0) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j}) \\ &= \int_{I \setminus R_h} F(x, u_0(x), u'_0(x)) \, dx + \lim_{j \rightarrow \infty} J_{R_h}(u_{n_j}) \\ &= \int_{I \setminus R_h} F(x, u_0(x), u'_0(x)) \, dx + \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) \, dt \, dx \end{aligned}$$

und dann

$$\int_{R_h} F(x, u_0(x), u'_0(x)) \, dx \leq \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) \, dt \, dx.$$

Teile durch h und betrachte den Limes für $h \rightarrow 0$. Da $x \mapsto F(x, u_0(x), p_0)$ stetig ist, folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$F(x_0, z_0, p_0) \leq \int_0^1 F(x_0, z_0, p_0 + \varphi'(t)) \, dt \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Da $|I| = 1$ folgt die Behauptung. Es bleibt die Zwischenbehauptung zu zeigen.

Beweis der Zwischenbehauptung Definiere die Intervalle

$$I_k := \left[x_0 + k \frac{h}{n_j}, x_0 + (k+1) \frac{h}{n_j} \right] \text{ für } k \in \{0, \dots, n_j - 1\},$$

und die induzierte Zerlegung

$$J_{R_h}(u_{n_j}) = \sum_{k=0}^{n_j-1} \int_{I_k} F(x, u_{n_j}(x), u'_{n_j}(x)) \, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_{I_k} F(x, u_{n_j}(x), u'_{n_j}(x)) \, dx \text{ mit } x = x_0 + (k+t) \frac{h}{n_j}, \, t \in [0, 1] \\ &= \frac{h}{n_j} \int_0^1 F\left(x_0 + (k+t) \frac{h}{n_j}, u_{n_j}\left(x_0 + (k+t) \frac{h}{n_j}\right), u'_{n_j}\left(x_0 + (k+t) \frac{h}{n_j}\right)\right) \, dt, \end{aligned}$$

wobei $u'_{n_j}(x_0 + k\frac{h}{n_j} + t\frac{h}{n_j}) = p_0 + \tilde{\varphi}'(k+t) = p_0 + \varphi'(t)$ wegen der Periodizität von $\tilde{\varphi}$. Also

$$J_{R_h}(u_{n_j}) = \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{h}{n_j} \int_0^1 F(x_0 + (k+t)\frac{h}{n_j}, u_{n_j}(x_0 + (k+t)\frac{h}{n_j}), p_0 + \varphi'(t)) dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $u_n \rightarrow u_0$ gleichmäßig in $[0, 1]$ und F stetig, existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n_j \geq N(\varepsilon)$ und $k \in \{0, \dots, n_j - 1\}$

$$\left| \int_0^1 F(x_0 + (k+t)\frac{h}{n_j}, u_{n_j}(x_0 + (k+t)\frac{h}{n_j}), p_0 + \varphi'(t)) dt - \int_0^1 F(x_0 + k\frac{h}{n_j}, u_0(x_0 + k\frac{h}{n_j}), p_0 + \varphi'(t)) dt \right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

so dass

$$\begin{aligned} & \left| J_{R_h}(u_{n_j}) - \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{h}{n_j} \int_0^1 F(x_0 + k\frac{h}{n_j}, u_0(x_0 + k\frac{h}{n_j}), p_0 + \varphi'(t)) dt \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{h}{n_j} \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{h}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Betrachte nun die Funktion

$$f(x) = \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) dt \text{ auf } [0, 1].$$

Da f stetig ist, ist es Riemann-integrierbar und somit existiert $N_1(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$ so dass für alle $n \geq N_1(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} & > \left| \int_{R_h} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{n} f(x_0 + k\frac{h}{n}) \right| \\ & = \left| \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) dt dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{n} \int_0^1 F(x_0 + k\frac{h}{n}, u_0(x_0 + k\frac{h}{n}), p_0 + \varphi'(t)) dt \right|. \end{aligned}$$

Somit für j groß genug

$$\begin{aligned} & \left| J_{R_h}(u_{n_j}) - \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) dt dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \left| \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{h}{n_j} \int_0^1 F(x_0 + k\frac{h}{n_j}, u_0(x_0 + k\frac{h}{n_j}), p_0 + \varphi'(t)) dt - \int_{R_h} \int_0^1 F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(t)) dt dx \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt die Zwischenbehauptung. □

Das Folgende ist eine hinreichende Bedingung für die schwache Unterhalbstetigkeit.

Satz 3.6.5 (Der Unterhalbstetigkeitssatz von Tonelli). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, z, p)$, so dass*

1. F und $D_p F$ sind stetig in (x, z, p) ;
2. es existiert $g \in L^1(I)$ mit $F(x, z, p) \geq g(x)$ f.ü. in I und für alle $(z, p) \in \mathbb{R}^{2N}$;
3. F ist konvex in p .

Dann ist das Funktional

$$J(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx$$

schwach unterhalbstetig in $W^{1,m}(I)$ für alle $m \in (1, \infty)$.

Siehe Theorem 3.5 in Buttazzo, Giaquinta, Hildebrandt: One-dimensional Variational Problems.

3.7 Existenztheorie

Ziel: Existenzresultat für

$$\inf_{u \in X} J(u) \quad \text{mit} \quad J(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x)) \, dx.$$

Satz 3.7.1. Sei $I = (a, b)$ ein beschränktes Intervall und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$. Sei $F \in C^1(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und es gelte

(H1) $(z, p) \mapsto F(x, z, p)$ ist konvex für alle $x \in \bar{I}$ (**Konvexität**);

(H2) es existieren $m > 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ so dass

$$F(x, z, p) \geq \alpha_1 |p|^m + \alpha_3 \quad \text{für alle} \quad (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

(**Koerzivität**);

(H3) es existiert $\tilde{\beta} \geq 0$ so dass für alle $(x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ gilt

$$|D_z F(x, z, p)|, |D_p F(x, z, p)| \leq \tilde{\beta}(1 + |z|^{m-1} + |p|^{m-1}),$$

mit m aus (H2). (**Wachstum**)

Dann gibt es

$$u \in X = \{v \in W^{1,m}(I; \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\},$$

so dass

$$J(u) = \inf\{J(v) : v \in X\}.$$

Außerdem ist das Minimum eindeutig, falls zusätzlich

$$(z, p) \mapsto F(x, z, p) \quad \text{strikt konvex für alle} \quad x \in [a, b] \quad \text{ist.}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Proposition 2.4.4. Es bleibt die Existenz zu zeigen.

Schritt 1: Beschränktheit Die Funktion

$$u_0(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{x - a}{b - a}, \quad x \in [a, b],$$

ist Element von X und somit

$$\inf\{J(v) : v \in X\} \leq J(u_0) < \infty,$$

da u_0, u'_0 beschränkt auf $[a, b]$ und F stetig.

Wir zeigen nun mit (H2), dass das Infimum auch von unten beschränkt ist. Für $u \in X$ gilt

$$F(x, u(x), u'(x)) \geq \alpha_1 |u'(x)|^m + \alpha_3$$

und dann

$$J(u) \geq \alpha_1 \int_I |u'(x)|^m dx + \alpha_3 |I| = \alpha_1 \|u'\|_m^m + \alpha_3 |I| \geq \alpha_3 |I| > -\infty.$$

Somit

$$J := \inf\{J(v) : v \in X\} \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Kompaktheit Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in X . Dann $u_k \in X$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J$. O.B.d.A. $J(u_k) \leq J + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus (H2) folgt dass

$$\begin{aligned} J + 1 &\geq J(u_k) \geq \alpha_1 \|u'_k\|_m^m + \alpha_3 |I| \\ \text{und } \|u'_k\|_m^m &\leq \frac{1}{\alpha_1} (J + 1 + |\alpha_3| |I|). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch in $L^m(I)$ gleichmäßig beschränkt ist. Da $u_k - u_0$ Null in a ist, liefert Satz 3.3.6 (Poincaré-Ungleichung)

$$\|u_k - u_0\|_m \leq C \|u'_k - u'_0\|_m$$

und dann

$$\begin{aligned} \|u_k\|_m &\leq \|u_k - u_0\|_m + \|u_0\|_m \quad (\Delta\text{-Ungleichung}) \\ &\leq C \|u'_k - u'_0\|_m + \|u_0\|_m \\ &\leq C (\|u'_k\|_m + \|u'_0\|_m + \|u_0\|_m) \leq C. \end{aligned}$$

Zusammengefasst: Koerzivität und Poincaré-Ungleichung liefern $\|u_k\|_{W^{1,m}(I)} \leq C$. Nach Satz 3.3.7 existiert $u \in W^{1,m}(I)$ und eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,m}(I). \quad (3.5)$$

Hier bezeichnet u den stetigen Repräsentanten.

Wir wollen noch haben, dass $u \in X$. Der Einbettungssatz (Satz 3.3.5) gibt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u_{k_j}\|_{C^0} &\leq C \|u_{k_j}\|_{W^{1,m}} \leq C \text{ für alle } j \in \mathbb{N}, \\ |u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)| &= \left| \int_x^y u'_{k_j}(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} |u'_{k_j}(t)| dt \quad (\text{mit Höldersche Ungleichung}) \\ &\leq \|u'_{k_j}\|_m (|x - y|)^{\frac{1}{m'}} \leq C |x - y|^{\frac{1}{m'}} \quad \text{mit } \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1. \end{aligned}$$

Der Satz von Arzelá-Ascoli liefert die Existenz einer Teilfolge und $v \in C^0(\bar{I})$, so dass

$$u_{k_{j_l}} \rightarrow v \quad \text{gleichmäßig in } \bar{I}.$$

Wegen (3.5) folgt $u \equiv v$ in \bar{I} . Da $u_k(a) = \alpha$, $u_k(b) = \beta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ und somit $u \in X$.

Schritt 3: Schwache Unterhalbstetigkeit

Wir wollen zeigen, dass falls $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(I)$, dann

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u).$$

Aus (H1) (Konvexität in (z, p)) folgt

$$\begin{aligned} F(x, u_k(x), u'_k(x)) &\geq F(x, u(x), u'(x)) + D_z F(x, u(x), u(x))(u_k(x) - u(x)) \\ &\quad + D_p F(x, u_k(x), u'_k(x))(u'_k(x) - u'(x)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

für fast alle $x \in I$. Wir zeigen mit (H3), dass

$$D_z F(x, u(x), u(x)) \in L^{m'}(I) \text{ und } D_p F(x, u(x), u(x)) \in L^{m'}(I),$$

wobei

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m'} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} \Leftrightarrow m' = \frac{m}{m-1}.$$

Da $F \in C^1$ sind beide Funktionen messbar und

$$\begin{aligned} \int_I |D_z F(x, u(x), u(x))|^{m'} dx &\leq \int_I \left(\tilde{\beta}(1 + |u(x)|^{m-1} + |u'(x)|^{m-1}) \right)^{m'} dx \\ &\quad (\text{Konvexität von } x \mapsto x^p, p > 1, \text{ auf } \mathbb{R}_+) \\ &\leq \tilde{\beta}^{m'} 3^{m'-1} \int_I \left((1 + |u(x)|^{(m-1)m'} + |u'(x)|^{(m-1)m'}) \right) dx \\ &= \tilde{\beta}^{m'} 3^{m'-1} (|b-a| + \|u_m\|_m^m + \|u'\|_m^m) < \infty, \end{aligned}$$

und analog für $D_z F(x, u(x), u(x))$. D.h. die Abbildungen

$$\begin{aligned} L^m(I) \ni f &\mapsto \int_I D_z F(x, u(x), u(x)) f(x) dx, \\ L^m(I) \ni f &\mapsto \int_I D_p F(x, u(x), u(x)) f(x) dx, \end{aligned}$$

sind stetige lineare Funktionale auf $L^m(I)$ und somit Elemente des Dualraums. Da

$$\begin{aligned} u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,m}(I) &\implies u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^m(I) \\ &\text{und } u'_k \rightharpoonup u' \text{ in } L^m(I). \end{aligned}$$

Es folgt für $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_I D_z F(x, u(x), u(x)) u_k(x) dx &\longrightarrow \int_I D_z F(x, u(x), u(x)) u(x) dx, \\ \int_I D_p F(x, u(x), u(x)) u'_k(x) dx &\longrightarrow \int_I D_p F(x, u(x), u(x)) u'(x) dx. \end{aligned}$$

Aus (3.6) folgt

$$\begin{aligned} &\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_I F(x, u_k(x), u'_k(x)) dx \\ &\geq \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx \\ &\quad + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_I D_z F(x, u(x), u(x)) (u_k(x) - u(x)) dx \\ &\quad + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_I D_p F(x, u_k(x), u'_k(x)) (u'_k(x) - u'(x)) dx = J(u), \end{aligned}$$

d.h. J ist schwach unterhalbstetig auf $W^{1,m}(I)$.

Schritt 4: Zusammenfassung

Da $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge ist, gilt $J(u_k) \rightarrow J(u)$. Andererseits für die Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ haben wir $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(I)$ mit $u \in X$. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit finden wir

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_{k_j}) \geq J(u).$$

Somit $J(u) = J$ und $u \in X$ ist ein Minimierer. □

Bemerkung 3.7.2. *Annahmen (H1) und (H3) wurden für die schwache Unterhalbstetigkeit benötigt. Man könnte dasselbe Resultat unter schwächeren Annahmen zeigen, wenn man Satz 3.6.5 (Tonelli Unterhalbsstetigkeitssatz) benutzen würde. Minimale Annahmen: F und $D_p F$ stetig und (H1-) F konvex in p .*

Beispiele

1. Das Dirichlet-Funktional

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_I |u'|^2 dx$$

erfüllt die Annahmen (H1), (H2) und (H3) mit $m = 2$.

2. Betrachte die Funktion

$$F(x, z, p) = \frac{1}{k} |p|^k \text{ für } k \in (1, \infty).$$

Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R})$ und es gelten

(H1) F ist konvex. In der Tat, mit Lemma 2.4.2 reicht es zu zeigen dass

$$\langle D_p F(p) - D_{p'} F(p'), p - p' \rangle \geq 0.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & \langle D_p F(p) - D_{p'} F(p'), p - p' \rangle \\ &= \langle |p|^{k-2} p - |p'|^{k-2} p', p - p' \rangle \\ &= |p|^k - |p|^{k-2} \langle p, p' \rangle - |p'|^{k-2} \langle p', p \rangle + |p'|^k \\ &\geq |p|^k - |p|^{k-1} |p'| - |p'|^{k-1} |p| + |p'|^k \\ &= (|p|^{k-1} - |p'|^{k-1})(|p| - |p'|) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

(H2) wahr, mit $\alpha_1 = \frac{1}{k}$, $\alpha_3 = 0$ und $m = k \in (1, \infty)$.

(H3) wahr.

Ein Minimierer existiert!

3. Das Funktional

$$\mathcal{L}(u) = \int_I \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$

(die Länge des Graphs von $\{(x, u(x)) : x \in I\}$) oder allgemeiner das Flächenfunktional

$$\mathcal{A}(u) = \int_I \sqrt{1 + (Du(x))^2} dx,$$

erfüllt (H2) nur mit $m = 1$. Das ist nicht erlaubt! Problem: $W^{1,1}(I)$ ist nicht reflexiv!

Satz 3.7.3. *Satz 3.7.1 gilt auch wenn (H2) durch*

(H2') *Es existieren $m > q \geq 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so dass*

$$F(x, z, p) \geq \alpha_1 |p|^m + \alpha_2 |z|^q + \alpha_3 \text{ für alle } (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

ersetzt wird.

Beweis. Wir merken zuerst, dass $u \in W^{1,m}(I)$ impliziert $u \in L^q(I)$ für alle $q \in [1, m)$, da I beschränkt ist. Siehe Übungen.

Wir möchten zeigen, dass J von unten beschränkt ist. Wegen (H2') gilt

$$J(u) \geq \alpha_1 \int_I |u'(x)|^m dx + \alpha_2 \int_I |u(x)|^q dx + \alpha_3 |I|,$$

mit $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

IDEE: Wir kontrollieren die L^q -Norm von u durch die L^m -Norm von u' .

Methode: Young'sche Ungleichung. Für $a, b > 0$, $r, r' \in (1, \infty)$ mit $1/r + 1/r' = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{r} a^r + \frac{1}{r'} b^{r'}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$, $a, b > 0$, $r, r' \in (1, \infty)$ mit $1/r + 1/r' = 1$ gilt

$$ab \leq \varepsilon a^r + C(\varepsilon, r') b^{r'} \text{ mit } C(\varepsilon, r') = \frac{1}{r'} (\varepsilon r)^{-\frac{r'}{r}}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(\varepsilon, m, q)$, abhängig nur von ε , m und q , so dass

$$|u(x)|^q \leq \varepsilon |u(x)|^m + C(\varepsilon, m, q).$$

Somit existiert eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha_3, I, \varepsilon, m, q) > 0$ so dass

$$J(u) \geq \alpha_1 \int_I |u'(x)|^m dx - |\alpha_2| \varepsilon \int_I |u(x)|^m dx - \tilde{C}.$$

Wie im Beweis von Satz 3.7.1 mit u_0 gleich der Geraden durch (a, α) und (b, β) und der Poincaré Ungleichung, finden wir

$$\begin{aligned} \|u\|_m &\leq \|u - u_0\|_m + \|u_0\|_m \\ &\leq C' \|u' - u'_0\|_m + \|u_0\|_m \\ &\leq C' (\|u'\|_m + \|u'_0\|_m + \|u_0\|_m), \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \alpha_1 \int_I |u'(x)|^m dx - |\alpha_2| C'^m \varepsilon \int_I |u'(x)|^m dx - C'' \\ &\geq (\alpha_1 - |\alpha_2| C'^m \varepsilon) \int_I |u'(x)|^m dx - C'' \end{aligned}$$

mit $C'' = C(\alpha_3, I, \varepsilon, m, q, a, \alpha, b, \beta)$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ so dass $\alpha_1 - |\alpha_2| C'^m \varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ und wir erreichen

$$J(u) \geq -C'' \text{ für alle } u \in X.$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass jede Minimalfolge gleichmäßig beschränkt in $W^{1,m}(I)$ ist. Mit denselben Abschätzungen die gerade gemacht wurden kann man zeigen, dass für jede Minimalfolge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für k groß genug gilt

$$\inf_{v \in X} J(v) + 1 \geq J(u_k) \geq \frac{1}{2} \int_I |u'(x)|^m dx - C''.$$

Dann ist $\|u'_k\|_m$ gleichmäßig beschränkt und mit der Poincaré Ungleichung erreichen wir, dass auch $\|u_k\|_m$ gleichmäßig beschränkt ist. Der Rest des Beweises bleibt unverändert. \square

Beispiel Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion

$$F(x, z, p) = \frac{1}{m} |p|^m - h(x)z,$$

für $h \in C^1(I)$ und $m \in (1, \infty)$. Es gilt

(H1) F ist konvex in z und p . In der Tat, mit Lemma 2.4.2 reicht es zu zeigen dass

$$\langle D_{z,p}F(x, z, p) - D_{z,p}F(z', p'), (z, p) - (z', p') \rangle \geq 0.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & \langle D_{z,p}F(x, z, p) - D_{z,p}F(z', p'), (z, p) - (z', p') \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -h(x) + h(x) \\ \frac{1}{m} (D_p |p|^m) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z - z' \\ p - p' \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0, \end{aligned}$$

wie in (3.7).

(H2') gilt, mit $q = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{m}$, $\alpha_2 = -\max_{x \in I} |h(x)|$ und $\alpha_3 = 0$.

(H3) gilt, da

$$\begin{aligned} |D_z F(x, z, p)| &= |h(x)| \leq C \leq C(1 + |z|^{m-1} + |p|^{m-1}), \\ |D_p F(x, z, p)| &= |p|^{m-1} \leq C \leq C(1 + |z|^{m-1} + |p|^{m-1}). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.7.4. *Im Allgemeinen darf nicht $m = q$ in (H2') sein.*

Beispiel Sei $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ und $N = 1$. Betrachte die Funktion

$$F(x, z, p) = \frac{1}{2}(p^2 - \lambda^2 z^2),$$

für $\lambda > \pi$. Es gilt

(H1) Konvexität. Die Funktion $p \mapsto F(x, z, p)$ ist konvex für alle $(x, z) \in I \times \mathbb{R}$, während $z \mapsto F(x, z, p)$ nicht konvex ist. Das ist aber nicht das Problem. Man kann zeigen dass Konvexität in p und (H2') die Existenz der Minimierer sichern (mit der Unterhalbstetigkeitssatz von Tonelli).

(H2') gilt, mit $m = q = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\lambda^2$ und $\alpha_3 = 0$.

(H3) gilt, da $|D_z F(x, z, p)| = \lambda^2 |z|$ und $|D_p F(x, z, p)| = |p|$.

Wir zeigen, dass das Problem

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_I ((u'(x))^2 - \lambda^2 (u(x))^2) dx \longrightarrow \min!$$

in $X = W_0^{1,2}(I)$ keine Lösung hat, denn

$$\inf_{u \in X} J(u) = -\infty.$$

Betrachte $u_m(x) = m \sin(\pi x) \in X$. Dann

$$\begin{aligned} J(u_m) &= \frac{1}{2} \int_I ((m\pi \cos(\pi x))^2 - \lambda^2 (m \sin(\pi x))^2) dx \\ &= \frac{1}{2} (m\pi)^2 \int_I \frac{\cos(2\pi x) + 1}{2} dx - \frac{1}{2} \lambda^2 m^2 \int_I \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} (m\pi)^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 m^2 = \frac{1}{4} m^2 (\pi^2 - \lambda^2) \longrightarrow -\infty, \end{aligned}$$

da $\lambda > \pi$.

Bemerkung 3.7.5. *Im Allgemeinen darf man weder die Koerzivität noch die Konvexität abschwächen.*

Beispiel wo die Koerzivität abgeschwächt wird Sei $N = 1$ und betrachte die Funktion $F(x, z, p) = \sqrt{p^2 + z^2}$.

(H1) Konvexität ist klar, da $\sqrt{p^2 + z^2} = \|(z, p)\|_2$ und jede Norm ist konvex.

(H2) gilt, ABER mit $m = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$.

(H3) gilt, ABER mit $m = 1$.

Betrachte das Funktional

$$J(u) = \int_0^1 \sqrt{(u(x))^2 + (u'(x))^2} dx,$$

auf

$$X = \{u \in W^{1,1}(0, 1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Man kann zeigen, dass J keinen Minimierer in X besitzt. (Übung!)

Beispiel wo die Konvexität abgeschwächt wird (Bolza Beispiel)

Sei $N = 1$, $I = [0, 1]$ und $F(x, z, p) = (p^2 - 1)^2 + z^2$. Betrachte

$$J(u) = \int_0^1 [(1 - (u'(x))^2)^2 + (u(x))^2] dx,$$

in

$$X = \{u \in W^{1,4}(I) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

(H1) Die Funktion $p \mapsto F(x, z, p)$ ist NICHT konvex.

(H2) J ist koerzitiv, da

$$\begin{aligned} F(x, z, p) &= p^4 + 1 - 2p^2 + z^2 \\ &\geq p^4 + 1 - \frac{1}{2}p^4 - 2 + z^2 \\ &= \frac{1}{2}p^4 - 1 + z^2 \geq \frac{1}{2}p^4 - 1. \end{aligned}$$

(H3) Wachstum:

$$\begin{aligned} |D_z F(x, z, p)| &\leq 2|z| \leq 8(1 + |p|^3 + |z|^3), \\ |D_p F(x, z, p)| &\leq 4|p^2 - 1||p| \leq 8(1 + |p|^3 + |z|^3). \end{aligned}$$

Das Funktional ist auch von unten beschränkt ($J(u) \geq 0$), so dass

$$\inf_{u \in X} J(u) \in \mathbb{R}.$$

Betrachte die Funktion

$$x \mapsto \tilde{\varphi}(x) := \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad x \in [0, 1],$$

und sei φ die periodische Fortsetzung von $\tilde{\varphi}$, mit Periode 1, auf ganz \mathbb{R} . Sei nun

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{k} \varphi(kx).$$

Dann $\varphi_k \in W^{1,4}(0, 1)$, $\varphi'_k(x) = 1$ für fast alle $x \in (0, 1)$ und $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$. Nun

$$\begin{aligned} J(\varphi_k) &= \int_0^1 (\varphi_k(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^1 (\varphi(kx))^2 dx \leq \frac{1}{k^2} \frac{1}{4} \longrightarrow 0, \text{ für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$\inf_{u \in X} J(u) = 0.$$

Gäbe es $u \in X$ mit $J(u) = 0$, dann müsste $u = 0$ f.ü. sein (und dann $u \equiv 0$ wegen die Stetigkeit von u) und $u' = 0$ f.ü. Widerspruch!

3.8 Das Lavrentiev-Phänomen

Das Lavrentiev-Phänomen tritt auf, falls

$$\begin{aligned} & \inf\{J(u) : u \in W^{1,m}(I; \mathbb{R}^N), \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta\}, \\ & < \inf\{J(u) : u \in C^1(I; \mathbb{R}^N), \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta\}, \end{aligned}$$

d.h. wenn wir nach Erweiterung des Definitionsbereichs zu einem anderen Energieniveau kommen. Das ist unerwünscht. Der Erweiterung der Klasse von Funktionen und der Generalisierung eines Funktionals, um ein klassisches Problem zu lösen, ist ein sehr komplexes Problem. Wie man im nächsten Beispiel sieht, soll die Wahl der Klasse von Funktionen sorgfältig getroffen werden.

Satz 3.8.1. Sei $F(x, z, p) = (x - z^3)^2 p^6$ und

$$J(u) := \int_0^1 F(x, u(x), u'(x)) \, dx.$$

Seien

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{u \in W^{1,\infty}(I) : u(0) = 0, \quad u(1) = 1\}, \\ W_2 &:= \{u \in W^{1,1}(I) : u(0) = 0, \quad u(1) = 1\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\inf\{J(u) : u \in W_1\} \geq \frac{7^2 3^5}{2^{18} 5^5} =: c_0 > 0 = \inf\{J(u) : u \in W_2\}.$$

Ein Minimierer für J in W_2 ist die Funktion $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Wir benutzen folgendes Hilfsresultat.

Lemma 3.8.2. Seien $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$\begin{aligned} W &:= \{u \in W^{1,\infty}(\alpha, \beta) : \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} \text{ in } [\alpha, \beta] \\ & \text{und } u(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{3}}, u(\beta) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{3}}\} \end{aligned}$$

und c_0 und F wie in Satz 3.8.1. Dann gilt

$$J_{\alpha,\beta}(u) := \int_{\alpha}^{\beta} F(x, u(x), u'(x)) \, dx \geq \frac{c_0}{\beta} \text{ für alle } u \in W.$$

Beweis von Satz 3.8.1. Die Funktion $x \mapsto \tilde{u}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ist in W_2 (sogar in $W^{1,\gamma}(0,1)$ für $\gamma \in [1, \frac{3}{2})$) und $J(\tilde{u}) = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass gegeben $u \in W_1$, dann $J(u) \geq c_0$. Da $u \in W^{1,\infty}(0,1)$, gibt uns Satz 3.3.5 dass u Lipschitz-stetig ist. Insbesondere ist die Steigung in 0 beschränkt. Betrachte folgende Mengen

$$A = \{a \in (0,1) : u(a) = \frac{1}{4}a^{\frac{1}{3}}\} \text{ und } B = \{b \in (0,1) : u(b) = \frac{1}{2}b^{\frac{1}{3}}\}.$$

Da $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ und u Lipschitz stetig, sind beide Mengen nicht-leer. Wähle

$$\alpha := \max\{a \in A\} \text{ und } \beta := \max\{b \in B\}.$$

Dann $\alpha < \beta$, u genügt den Annahmen von Lemma 3.8.2 und wegen Lemma 3.8.2 gilt

$$J(u) \geq \int_{\alpha}^{\beta} F(x, u(x), u'(x)) dx \geq \frac{c_0}{\beta} > c_0 > 0,$$

da $\beta < 1$. Die Behauptung folgt. \square

Beweis von Lemma 3.8.2. Wegen der Annahme $u(x) \leq \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$, gilt

$$1 - \frac{(u(x))^3}{x} \geq 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{2^3} \text{ für alle } x \in (\alpha, \beta).$$

Dann

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(u) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - (u(x))^3)^2 (u'(x))^6 dx \\ &\geq \frac{7^2}{2^6} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 (u'(x))^6 dx. \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine clevere Substitution machen. Sei $\tilde{u}(y) := u(\Phi(y))$ mit $x = \Phi(y)$ und Φ geeignet. Dann (wegen $\tilde{u}'(y) = u'(\Phi(y))\Phi'(y)$) soll gelten

$$\Phi(y)^2 (\Phi'(y))^{-6} \Phi'(y) = 1 \Leftrightarrow \Phi(y)^{\frac{2}{5}} = \Phi'(y) \Leftrightarrow \Phi(y) \sim y^{\frac{5}{3}}.$$

Also mit $x = y^{\frac{5}{3}}$ erreichen wir

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(u) &\geq \frac{7^2}{2^6} \int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}} y^{\frac{10}{3}} (\tilde{u}'(y) \frac{3}{5} y^{-\frac{2}{3}})^6 \frac{5}{3} y^{\frac{2}{3}} dy \\ &= \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} \int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}} (\tilde{u}'(y))^6 dy. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Jensensche Ungleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $u \in L^1(\Omega)$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u(x)) dx.$$

Da $x \mapsto x^6$ konvex ist, gilt

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(u) &\geq \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} (\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}) \left(\frac{1}{\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}} \int_{\alpha^{\frac{3}{5}}}^{\beta^{\frac{3}{5}}} \tilde{u}'(y) dy \right)^6 \\ &= \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} (\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}) \left(\frac{1}{\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}}} (u(\beta) - u(\alpha)) \right)^6 \\ &= \frac{7^2 3^5}{2^6 5^5} \frac{1}{(\beta^{\frac{3}{5}} - \alpha^{\frac{3}{5}})^5} \left(\frac{1}{2} \beta^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} \alpha^{\frac{1}{3}} \right)^6 \\ &= \frac{7^2 3^5}{2^{12} 5^5} \frac{1}{\beta} \frac{1}{(1 - (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{3}{5}})^5} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^6 \geq \frac{7^2 3^5}{2^{18} 5^5} \frac{1}{\beta}, \end{aligned}$$

da $0 < \alpha < \beta < 1$. □

Man kann zeigen, dass polynomiales Wachstum in p , d.h.

$$c_0 |p|^m \leq F(x, z, p) \leq c_1 |p|^m + c_2, (m \in (1, \infty))$$

das Lavrentiev Phänomen verhindert.

Anhang A

Einige Resultate

A.1 Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzw. der Regel der partiellen Integration auf mehrdimensionale Integrale.

Dazu brauchen wir zuerst das Konzept von \mathcal{C}^1 -glatt berandeten Gebieten.

Definition A.1.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Wir sagen, G ist ein \mathcal{C}^1 -glatt berandetes Gebiet, falls es zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial G$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt

1. $G \cap U = \{x \in U : g(x) > 0\}$;
2. $\partial G \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}$;
3. $Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein \mathcal{C}^1 -glatt berandetes beschränktes Gebiet. Sei $x_0 \in \partial G$. Dann existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine \mathcal{C}^1 -glatte Funktion g so dass 1., 2. und 3. in Definition A.1.1 gelten. Wir definieren dann die **äußere Normale** an ∂G in x_0 als

$$\nu(x_0) := -\frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|_2},$$

wobei $\nabla g(x_0) = (Dg(x_0))^t$ der Gradient von g in x_0 ist und $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm ist. Somit können wir eine Abbildung

$$\nu : \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}, \quad x_0 \mapsto \nu(x_0),$$

definieren, die **äußere Einheitsnormale an ∂G** .

Satz A.1.2. *Seien $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, C^1 -glatt berandetes Gebiet und $\nu : \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an ∂G . Dann gibt es ein Oberflächenmaß $S(\cdot)$ definiert auf ∂G , so dass für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R}^d)$ gilt:*

$$\int_G \operatorname{div}(f(x)) \, dx = \int_{\partial G} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, dS(x). \quad (\text{A.1})$$

Insbesondere gilt für f mit kompaktem Träger in G :

$$\int_G \operatorname{div}(f(x)) \, dx = 0.$$

Für $f \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R})$ und ein beliebiges $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt:

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, dx = \int_{\partial G} f(x) \nu^i(x) \, dS(x), \quad (\text{A.2})$$

wobei ν^i die i -te Komponente von ν ist.

Bemerkung A.1.3. 1. Die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes f ist definiert durch:

$$\operatorname{div}(f(x)) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x_i}(x),$$

somit für $G \subset \mathbb{R}^d$ haben wir $\operatorname{div} : C^1(G; \mathbb{R}^d) \rightarrow C^0(G; \mathbb{R})$.

2. Allgemeinere Regularitätsannahme auf G :

Man darf $(d-2)$ -dimensionale "Ecken" und "Kanten" zulassen, in denen glatte Stücke von ∂G aneinander stoßen. Insbesondere gilt der Satz von Gauß auch auf Quadern und diffeomorphen Bildern von Quadern.