Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
25.04.16, 14 Uhr
N24/104

James Kennedy
Adrian Spener
Sommer 2016

17 Punkte

Elemente der Variationsrechnung

Blatt 01

1. Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beliebig. Zeige:

(i) Die Menge der stetigen, reellwertigen und beschränkten Funktionen auf A, $\mathcal{C}_b(A;\mathbb{R})$, ist ein Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation. (1)

Bemerkung: Für $\mathcal{C}_b(A;\mathbb{R})$ schreiben wir auch verkürzend $\mathcal{C}_b(A)$.

(ii) Die Abbildung $||\cdot||_\infty : \mathcal{C}_b(A) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto ||u||_\infty := \sup\limits_{x\in A} |u(x)|$ ist eine Norm. (1)

(iii) Eine Folge $(u_n) \in \mathcal{C}_b(A)$ konvergiert bezüglich der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ gegen ein $u\colon A \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn (u_n) gleichmäßig auf A gegen u konvergiert. (1)

(iv) Der Raum $(\mathcal{C}_b(A), ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum. (2)

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Wir definieren nun die Menge $\mathcal{C}^1(\Omega)$ als die Menge von Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, für welche $D^\alpha u$ existiert und stetig ist für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le 1$. (4)
Außerdem setzen wir $\mathcal{C}^1(\bar\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\bar\Omega) \,\big|\, u_{|\Omega} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und für alle $|\alpha| \le 1$ lässt sich $D^\alpha u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig auf $\bar\Omega$ fortsetzen$\}$. Zeige:
Die Abbildung $||\cdot||_{\mathcal{C}^1} : \mathcal{C}^1(\bar\Omega) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto ||u||_\infty + \sum\limits_{j=1}^d \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right|_\infty$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^1(\bar\Omega)$, welche diesen zu einem Banachraum macht.

3. Wir betrachten das Funktional

$$J : X \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_{-1}^{1} \left(1 - (u'(x))^2\right)^2 \mathrm{d}x$$

auf der Menge $X := \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) \,\big|\, u(-1) = u(1) = 0\}$.

(i) Zeige: $\inf\limits_{u\in X} J(u) = 0$. (4)

Hinweis: Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $P_n(x) = 1 - \frac{1}{4n} - nx^2$, definiert auf $\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$, zu einer Funktion aus X fort.

(ii) Zeige: $\min\limits_{u\in X} J(u)$ existiert nicht. (2)

(iii) Bestimme für $u, \varphi \in X$ die erste Variation von J an u in Richtung φ, also $\delta J(u)\varphi$. (2)

Vorleistung: Zum Bestehen der Vorleistung genügen 50% der Summe der Punkte auf den Übungsblättern. Meldet euch dafür im Moodle für diese Veranstaltung an. Bitte nicht zu zweit abgeben.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:

`http://www.uni-ulm.de/?74871`