Elemente der Variationsrechnung

Blatt 02

4. Wir betrachten die Länge von Kurven, also das Funktional (5)

$$J : X \to \mathbb{R},\ \gamma \mapsto \int_0^1 ||\dot{\gamma}(x)||_2 \,\mathrm{d}x$$

auf der Menge der regulären Kurven

$$X = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)^T \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}^d) \,\big|\, \dot{\gamma} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\gamma_1, \dots, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\gamma_d)^T \neq 0 \,\forall\, x \in [0,1]\}.$$

Dabei bezeichne $||\cdot||_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^d$.
Zeige für jedes $\gamma \in X$, dass die erste Variation von J in γ in Richtung $v \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}^d)$ existiert und bestimme diese.

5. Sei X ein Banachraum, $V \subset X$ offen und $J : V \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Sei $u \in V$ ein Extremum von J und die erste Variation von J an u in Richtung $\varphi \in X$ existiere. Zeige, dass dann gilt: (3)

$$\delta J(u)(\varphi) = 0.$$

6. Die Brachistochrone
Betrachte für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $y_1, y_2 > 0$ das Funktional

$$J(u) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}} \,\mathrm{d}x$$

auf $V = \{u \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2] : u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2, u > 0 \text{ auf } [x_1, x_2]\}$.
In der Vorlesung wurde mit partieller Integration gezeigt, dass für die erste Variation an $u \in V$ in Richtung $\varphi \in W := \{\psi \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2] \,\big|\, \psi(x_1) = \psi(x_2) = 0\}$ gilt:

$$\delta J(u)(\varphi) = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1 + (u'(x))^2)}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{u(x)^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(x) \,\mathrm{d}x,$$

also folgt mit dem Hauptlemma die Euler-Lagrange-Gleichung für die Brachistochrone:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)(1 + (u'(x))^2)}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{u(x)^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ auf } (x_1, x_2).$$

— bitte wenden —

Zeige für ein Extremum $u \in V$ von J:

(i) Es gilt: $\dfrac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}} - u' \left(\dfrac{u'}{\sqrt{u(1+(u')^2)}} \right)$ ist konstant auf (x_1, x_2). (3)

(ii) Es existiert ein $\mu > 0$ mit $u\,(1+(u')^2) = 2\mu$ auf (x_1, x_2). (2)

(iii) Eine Lösung von $u(1+(u')^2) = 2\mu$ auf $(0, 2\pi\mu)$ mit dem Anfangswert $u(0) = 0$ ist gegeben durch $u(x) = \mu(1 - \cos(\vartheta^{-1}(x)))$, sofern wohldefiniert. Dabei ist $\vartheta(t) = \mu(t - \sin t)$. (3)

Warnung: Versuche nicht, die Umkehrfunktion von ϑ explizit zu bestimmen.

Bemerkung: Die Kurve $x \mapsto (x, u(x))$ ist eine **Zykloide**, also die Bahn, der ein Punkt auf der Kreislinie beim Abrollen des Kreises folgt.