Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
13.06.16, 14 Uhr
N24/104

James Kennedy
Adrian Spener
Sommer 2016

$15 + 2^*$ Punkte

Elemente der Variationsrechnung

Blatt 05

13. Es seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $T\colon X \to Y$ linear. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (3)

(a) T ist stetig auf X.

(b) T ist stetig in 0.

(c) T ist beschränkt im folgenden Sinn: Es existiert eine Konstante $M \geq 0$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ für alle } x \in X.$$

14. (i) Zeige die **Young'sche Ungleichung**: (2^*)
Für alle $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt für alle $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Hinweis: $-\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konvex.

(ii) Zeige die **Hölder-Ungleichung**: (2)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt für alle $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$: $uv \in L^1(\Omega)$ mit

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

15. Zeige: $(\ell^1(\mathbb{N}))^* \cong \ell^\infty(\mathbb{N})$. (3)
Hinweis: Die Vorschrift der Identifikation ist wie bei $(\ell^p)^* \cong \ell^{p'}$, wobei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ist. Betrachte $\varphi(e_k)$, also die Wirkung von $\varphi \in (\ell^1)^*$ auf die Einheitsvektoren $e_k \in \ell^1$, um eine korrespondierende Folge in ℓ^∞ zu erhalten.

16. Es sei $1 < p < \infty$. Zeige: (1)

$$e_k \rightharpoonup 0 \in \ell^p(\mathbb{N}).$$

17. Es sei $f \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ und X der Banachraum $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (vgl. Aufg. **1**). Sei weiter $T_f\colon X \to X$,

$$T_f(u)(s) = \int_0^1 f(s,t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

(i) Zeige: T_f ist wohldefiniert, linear und stetig. (2)

(ii) Es sei u_k eine Folge in X mit $\|u_k\|_\infty \leq 1$. Zeige, dass eine Teilfolge von $(T_f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein $v \in X$ konvergiert. (4)
Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass $T_f\colon X \to X$ ein *kompakter* Operator ist.