

Nonlinear Partial Differential Equations (SoSe 2016): Fragen zur Vorbereitung auf die Prüfung

Die folgenden Fragen fassen die wichtigsten Themen und Schwerpunkte des Kurses zusammen und sollen richtungsweisend sein. Die Fragen sind nicht direkt als Prüfungsfragen zu verstehen, könnten aber in dieser oder ähnlicher Form in der Prüfung gestellt werden. Wo passend, sollte man diese Themen auch anhand konkreter gegebener Gleichungen besprechen bzw. die entsprechenden Sätze anwenden können.

- (1) Was ist ein wohlgestelltes Problem? Wie definiert man die Ordnung einer Differentialgleichung? Den „Grad“ der Nichtlinearität?
- (2) Wie definiert man elliptische (Differential-) Operatoren? Welche Eigenschaften haben diese, z.B. im Bezug auf Funktionale?
- (3) Wie und wozu definiert man schwache Lösungen? Wie unterscheiden sich schwache Lösungen von anderen Lösungen bzw. Lösungsbegriffen? Man erkläre dies auch anhand geeigneter Beispiele.
- (4) Wie kann man Randbedingungen im schwachen Sinn interpretieren?
- (5) Was ist eine Euler–Lagrange-Gleichung und wie hängt sie mit partiellen Differentialgleichungen und Funktionalen zusammen?
- (6) Unter welchen Bedingungen besitzt ein Funktional etwa im Banachraum einen Minimierer? Wann ist dieser eindeutig?
- (7) Man diskutiere mögliche Ansätze bzw. Lösungsstrategien für eine exemplarische Gleichung wie

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Was sind „Lösungen“ dieser Gleichung? Welche Methoden sind verfügbar je nach Voraussetzungen an f ?

- (8) Wie kann man die Existenz von Eigenwerten nichtlinearer Differentialoperatoren beweisen? (Wie) kann man sie charakterisieren?
- (9) Was ist eine Variations(un)gleichung und woher kommen sie?
- (10) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Lösungen einer Euler–Lagrange-Gleichung und der Topologie der Niveaumengen des zugehörigen Energiefunktional? Wie nutzen „mountain pass theorems“ das aus?
- (11) Wie kann man schwache Lösungen von parabolischen Problemen definieren? Man gebe Beispiele für Gleichungen, die eine Lösung besitzen, und skizziere die Ideen des entsprechenden Existenzbeweises.
- (12) Welche Fixpunktsätze kann man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen verwenden und wie? Wieder mit Beispielen!

- (13) Was versteht man unter „monotonen Operatoren“? Man erkläre den Zusammenhang zwischen Monotonie und Konvexität. Wie können Lösungen von Gleichungen mit monotonen Operatoren charakterisiert werden?
- (14) Was besagt der Satz von Browder und Minty? Wie kann man ihn anwenden?
- (15) Man diskutiere anhand passender Beispiele, unter welchen Bedingungen die globale (in Zeit) Existenz von Lösungen von parabolischen Gleichungen vorhanden ist und wie die Art (oder „Stärke“) einer möglichen Nichtlinearität dies beeinflussen kann.
- (16) Man skizziere den Beweis der Pohozaev-Identität und zeige mittels derer, wie die Nichtexistenz von Lösungen bestimmter Gleichungen festgestellt werden kann. Wie hängt dies mit dem Begriff eines „kritischen Exponenten“ zusammen?